

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD CUAJIMALPA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
APLICADAS Y SISTEMAS

FUNCIONES ESPECIALES  
CON APLICACIONES A LA MECÁNICA CUÁNTICA Y AL  
ELECTROMAGNETISMO

JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO  
jromero@correo.cua.uam.mx

# Índice general

<b>1. La Convención de Suma de Einstein, el Tensor de Levi-Civita y las Ecuaciones de Maxwell</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Producto escalar y la delta de Kronecker . . . . .	9
1.3. Producto vectorial y el tensor de Levi-Civita . . . . .	12
1.4. El tensor de Levi-Civita y las matrices . . . . .	15
1.4.1. El tensor de Levi-Civita y las matrices antisimétricas . . . . .	15
1.4.2. El tensor de Levi-Civita y matrices simétricas . . . . .	16
1.4.3. Conservación de carga . . . . .	18
1.5. Triple producto escalar . . . . .	18
1.6. Aplicaciones del Triple producto escalar . . . . .	19
1.6.1. Energía Cinética . . . . .	20
1.6.2. Conservación de la Energía . . . . .	20
1.7. Contracción de dos tensores de Levi-Civita . . . . .	21
1.8. Triple producto vectorial I . . . . .	23
1.9. Conservación del Momento . . . . .	24
1.9.1. Conservación del momento angular . . . . .	27
1.10. Triple producto vectorial II . . . . .	28
1.10.1. Ecuación de onda . . . . .	29
1.11. Libertad de Norma . . . . .	29
1.12. Representación compleja de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	32
<b>2. Operadores en coordenadas curvilíneas</b>	<b>34</b>
2.1. Teoremas de Cálculo Vectorial . . . . .	34
2.1.1. Interpretación geométrica de operaciones vectoriales . . . . .	36
2.2. Operadores en coordenadas cartesianas . . . . .	38
2.2.1. Coordenadas Esféricas . . . . .	39
2.2.2. Coordenadas Cilíndricas . . . . .	41
2.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales . . . . .	42
2.3.1. Gradiente en coordenadas curvilíneas . . . . .	44

2.3.2.	Divergencia en coordenadas curvilíneas . . . . .	45
2.3.3.	Laplaciano en coordenadas curvilíneas . . . . .	46
2.3.4.	Rotacional en coordenadas curvilíneas . . . . .	47
2.4.	Operador momento angular . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>El Factorial y la Función Gamma</b>	<b>52</b>
3.1.	Función Gamma . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>57</b>
4.1.	Teorema de Existencia y unicidad . . . . .	57
4.2.	El Wronskiano . . . . .	57
4.3.	Independencia lineal . . . . .	58
4.4.	Los ceros de las soluciones . . . . .	59
4.4.1.	Forma Normal . . . . .	60
4.5.	Teorema de comparación de Sturm . . . . .	63
4.6.	Problema de Sturm-Liouville . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>Funciones de Bessel</b>	<b>68</b>
5.1.	Ecuación de Bessel . . . . .	68
5.2.	Función generatriz . . . . .	72
5.3.	Relaciones de recurrencia . . . . .	74
5.4.	Funciones de Bessel de orden $(n + \frac{1}{2})$ . . . . .	76
5.5.	Ortonormalidad . . . . .	78
5.6.	Ecuación de Helmholtz en dos dimensiones . . . . .	82
5.7.	La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas . . . . .	85
5.7.1.	Ejemplo . . . . .	88
5.8.	Ecuaciones tipo Bessel . . . . .	90
5.8.1.	Partícula cuántica en una fuerza constante . . . . .	91
5.9.	Integrales . . . . .	92
5.10.	Ecuación de Bessel modificada . . . . .	92
<b>6.</b>	<b>Elementos de Álgebra Lineal</b>	<b>93</b>
6.1.	Espacios Vectoriales . . . . .	93
6.2.	Ejemplos . . . . .	94
6.2.1.	$\mathbf{C}^n$ . . . . .	94
6.2.2.	Sucesiones . . . . .	94
6.2.3.	Matrices . . . . .	95
6.2.4.	Funciones . . . . .	95
6.3.	Producto Escalar . . . . .	96
6.4.	Ejemplos de producto escalar . . . . .	97
6.4.1.	Vectores en $\mathbf{C}^n$ . . . . .	97

6.4.2.	Sucesiones . . . . .	98
6.4.3.	Matrices . . . . .	98
6.4.4.	Funciones . . . . .	99
6.5.	Ortonormalidad e Independencia Lineal . . . . .	100
6.5.1.	Teorema de Pitágoras . . . . .	101
6.5.2.	Desigualdad de Bessel . . . . .	103
6.5.3.	Desigualdad de Schwarz . . . . .	103
6.5.4.	Desigualdad del triángulo . . . . .	103
6.6.	Espacios Normados . . . . .	104
6.6.1.	Espacios métricos . . . . .	105
6.7.	Ejemplos de bases ortonormales . . . . .	106
6.7.1.	Exponencial compleja . . . . .	106
6.7.2.	Ecuaciones tipo Sturm-Liouville . . . . .	107
6.7.3.	Ecuación de Schrodinger en una dimension . . . . .	108
6.7.4.	Ecuación de Schrodinger en tres dimensiones . . . . .	108
6.7.5.	Armónicos esféricos . . . . .	110
6.8.	Polinomios Trigonométricos . . . . .	112
6.9.	Espacios completos . . . . .	114
6.10.	Operadores Lineales . . . . .	115
6.11.	Operador Adjunto . . . . .	117
6.11.1.	Matrices . . . . .	118
6.11.2.	Derivada . . . . .	118
6.11.3.	Derivada con peso . . . . .	119
6.11.4.	Propiedades del operador adjunto . . . . .	119
6.12.	Operadores Hermíticos . . . . .	120
6.12.1.	Ejemplos de Matrices Hemíticas . . . . .	121
6.12.2.	Ejemplos de operadores Hermíticos . . . . .	121
6.13.	Conmutador . . . . .	122
6.13.1.	Propiedades de los conmutadores . . . . .	124
6.13.2.	Ejercicio . . . . .	125
6.14.	Conmutadores y la Derivada . . . . .	127
6.15.	Vectores propios . . . . .	129
6.15.1.	Espectro de operadores Hermíticos . . . . .	129
6.15.2.	Operadores que conmutan . . . . .	130
<b>7.</b>	<b>Prueba de Feynman de dos ecuaciones de Maxwell</b>	<b>131</b>
7.1.	Fuerza de Lorentz . . . . .	131
7.2.	Inexistencia de Monopolos Magnéticos . . . . .	133
7.3.	Ley de Faraday . . . . .	133

<b>8. El oscilador armónico y los polinomios de Hermite</b>	<b>135</b>
8.0.1. Ortonormalidad . . . . .	136
8.1. Operadores de acenso y decenso . . . . .	136
8.2. Estado Base y Ortonormalidad . . . . .	141
8.3. Polinomios de Hermite . . . . .	143
8.4. Función Generadora . . . . .	146
8.4.1. Ecuación de Hermite . . . . .	149
8.5. Método tradicional . . . . .	150
8.6. Oscilador en campo eléctrico constante . . . . .	153
8.7. Suma de osciladores y el oscilador en $D$ dimensiones . . . . .	154
8.7.1. Cadena de osciladores . . . . .	156
8.7.2. Oscilador en $D$ dimensiones . . . . .	158
<b>9. El Grupo de rotaciones y los Armónicos Esféricos</b>	<b>159</b>
9.1. Transformaciones de coordenadas lineales . . . . .	159
9.2. Laplaciano y elemento de línea . . . . .	161
9.3. Grupo de Transformaciones . . . . .	162
9.4. El grupo de rotaciones . . . . .	164
9.4.1. Transformaciones infinitesimales . . . . .	168
9.5. Armónicos esféricos . . . . .	173
9.6. Reglas de Conmutación del Momento Angular . . . . .	174
9.7. Ecuación de valores propios de $L^2$ . . . . .	175
9.8. Relaciones de Ortonormalidad . . . . .	176
9.9. Operadores Escalera y Espectro de $L^2$ . . . . .	178
9.10. El armónico esférico $Y_l(\theta, \varphi)$ . . . . .	182
9.11. Constante $\alpha$ y reglas de recurrencia . . . . .	184
9.11.1. Relaciones de recurrencia de $L_{\pm}$ . . . . .	185
9.12. Forma explícita de los armónicos esféricos . . . . .	186
9.13. Polinomios de Legendre y Polinomios Asociados de Legendre . . . . .	188
9.14. Propiedades de los Polinomios de Legendre . . . . .	191
9.14.1. Función generadora . . . . .	193
9.14.2. Relaciones de recurrencia . . . . .	194
9.15. Relación de completez de los armónicos esféricos . . . . .	197
9.16. Teorema de adición de los armónicos esféricos . . . . .	198
9.16.1. Implicaciones del Teorema de adición . . . . .	202
9.17. $L^2$ y el Laplaciano . . . . .	204
9.18. Paridad . . . . .	205

<b>10. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas</b>	<b>206</b>
10.0.1. Problema de la esfera . . . . .	208
10.0.2. Fórmula de Poisson . . . . .	209
10.0.3. Esfera partida . . . . .	211
10.1. Esfera a potencial cero . . . . .	213
10.1.1. Plano con protuberancia esférica . . . . .	214
10.2. Problemas con simetría azimutal . . . . .	215
10.2.1. Esfera con condiciones especiales . . . . .	215
10.2.2. Potencial de un anillo circular . . . . .	216
10.2.3. Esfera con hueco . . . . .	218
10.3. Disco a potencial constante . . . . .	220
10.4. Distribución de carga continua . . . . .	222
10.4.1. Esfera cargada . . . . .	224
10.5. Problemas en Magnetismo . . . . .	225
10.5.1. Esfera rotante . . . . .	226
10.5.2. Anillo de corriente I . . . . .	228
10.5.3. Anillo de corriente II . . . . .	230
<b>11. Los Polinomio de Laguerre y el Átomo de Hidrógeno</b>	<b>236</b>
11.1. Átomo de Hidrógeno . . . . .	236
11.2. Función de onda . . . . .	245
<b>12. Ecuación de Helmholtz</b>	<b>247</b>
12.1. Aplicaciones . . . . .	249
12.2. Cavidades Resonantes . . . . .	249
12.3. Desarrollo en ondas parciales . . . . .	249
12.4. Cavidades Resonantes . . . . .	253
<b>13. Otras aplicaciones de la Ecuación de Schrodinger</b>	<b>254</b>
13.1. Ecuación de Fokker-Planck . . . . .	254
13.1.1. caso libre y homogéneo . . . . .	256
13.2. Black-Scholes . . . . .	259

# Capítulo 1

## La Convención de Suma de Einstein, el Tensor de Levi-Civita y las Ecuaciones de Maxwell

*Le calcul tensoriel sait mieux la physique que le physicien lui-même*  
( El cálculo tensorial sabe más física que los mismos físicos )  
Paul Langevin 1964.

### 1.1. Introducción

En este capítulo veremos algunas herramientas matemáticas que facilitan la manipulación de operaciones vectoriales. Para ver la eficacia de estas herramientas las aplicaremos a las ecuaciones de Maxwell y a la fuerza de Lorentz. En particular ocupando estas herramientas veremos las cantidades conservadas que implican las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga y  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica. De forma genérica  $\vec{J}$  se puede escribir como  $\vec{J} = \rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)$  con  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  la velocidad de las partículas cargadas en el punto  $\vec{x}$  al tiempo  $t$ .

La ley de Gauss (1.1) relaciona la densidad de carga eléctrica con el campo eléctrico. La ley de Faraday (1.2) nos dice que un campo magnético que varia en el tiempo produce un campo eléctrico. La ecuación (1.3) nos dice que no existen cargas magnéticas. La ley de Ampère (1.4) nos dice dos cosas, la primera es que la corriente eléctrica produce campo magnético y la segunda es que la variación temporal del campo eléctrico produce campo magnético. Como se puede ver todas estas ecuaciones son lineales.

Además, la fuerza de Lorentz no dice que una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  siente la fuerza

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (1.5)$$

Esta fuerza se puede obtener de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo para interpretar los resultados que obtendremos la supondremos independiente.

Las ecuaciones de Maxwell (1.1)-(1.4) también se pueden escribir de forma integral. Para ver esto, recordemos el teorema de Gauss y el teorema de Stokes. Supongamos que tenemos una región de volumen  $V$  cuya frontera es la superficie  $S$ . Entonces, el teorema de Gauss nos dice que, si  $\vec{F}$  es un campo vectorial suave definido en  $V$ , se cumple

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} da, \quad (1.6)$$

aquí  $\hat{n}$  representa la normal exterior a la superficie. Ahora, supongamos que tenemos una superficie  $S$  cuya frontera está dada por la curva  $\Gamma$ . Entonces, el teorema de Stokes nos dice que si  $\vec{F}$  es un campo regular sobre  $S$ , se cumple

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (1.7)$$

donde  $\vec{l}$  es el vector tangente a  $\Gamma$  y gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Así, ocupando el teorema de Gauss (1.6) y de Stokes (1.7), las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi Q_T, \quad (1.8)$$



$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (1.9)$$

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \quad (1.10)$$

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (1.11)$$

Donde

$$Q_T = \int_V \rho dv \quad (1.12)$$

es la carga total contenida en el volumen  $V$ . Mientras que

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da, \quad \Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da \quad (1.13)$$

son, respectivamente, el flujo magnético y eléctrico que pasa por la superficie  $S$ . Además

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da \quad (1.14)$$

representa la corriente total que pasa por la superficie  $S$ .

## 1.2. Producto escalar y la delta de Kronecker

Recordemos que un vector tridimensional se define como

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A^1, A^2, A^3), \quad (1.15)$$

también lo podemos representar como  $A^i$  con  $i = 1, 2, 3$ , es decir,  $A^i$  es la componente  $i$ -ésima.

Una operación importante entre vectores es el producto escalar. Si tenemos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ , el producto escalar se define como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = \sum_{i=1}^3 A^i B^i. \quad (1.16)$$

Por simplicidad es común escribir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B^i, \quad (1.17)$$

donde se entiende que los índices repetidos se suman, a esta regla se le llama convención de Einstein. Cuando dos índices están repetidos se dice que están *contraídos*. Por ejemplo, si

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \quad (1.18)$$

es el vector posición, entonces el cuadrado de la distancia es

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^i x^i = x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1.19)$$

Ahora, definamos la delta de Kronecker como el símbolo tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.20)$$

En realidad se está definiendo una matriz, la matriz identidad  $I$ , pues,

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (1.21)$$

Con la delta de Kronecker y la convención de Einstein se tiene

$$\delta_{1j} A_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{1j} A_j = A_1, \quad \delta_{2j} A_j = A_2, \quad \delta_{3j} A_j = A_3, \quad (1.22)$$

es decir

$$\delta_{ij} A_j = A_i. \quad (1.23)$$

Por lo que, el producto escalar se puede escribir como

$$A^i \delta_{ij} B^j = A^i B^i = \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (1.24)$$

Además, con la convención de Einstein el símbolo  $\delta_{ii}$  significa

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3. \quad (1.25)$$

Un vector importante es el gradiente, el cual se define como

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (1.26)$$

Por simplicidad, en algunos caso solo escribiremos

$$\left(\vec{\nabla}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.27)$$

Veamos que significa

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \partial_i x^j, \quad (1.28)$$

para cada valor de  $i$  y  $j$  se tiene un valor de  $\partial_i x^j$  por lo que se tiene la matriz

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}. \quad (1.29)$$

Ahora, considerando que  $r = \sqrt{x^i x^i}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x^j} &= \frac{\partial \sqrt{x^i x^i}}{\partial x^j} = \frac{1}{2\sqrt{x^i x^i}} \frac{\partial (x^i x^i)}{\partial x^j} = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^j} x^i + x^i \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2r} (\delta_{ij} x^i + x^i \delta_{ij}) = \frac{x_j}{r}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

De donde

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = \frac{x_j}{r}, \quad \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}. \quad (1.31)$$

Si  $f(r)$  es una función que solo depende de  $r$  se tiene

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x^i} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{x_i}{r}, \quad \vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r}. \quad (1.32)$$

Veamos otro ejemplo, consideremos la función

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.33)$$

con  $\vec{P}$  un vector constante. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \left( \frac{\partial \vec{P} \cdot \vec{r}}{\partial x^i} \right) \frac{1}{r^3} + \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{r^3} \right) \\ &= \left( \frac{\partial P_j x_j}{\partial x^i} \right) \frac{1}{r^3} - 3\vec{P} \cdot \vec{r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x^i} \\ &= \frac{P_j}{r^3} \frac{\partial x_j}{\partial x^i} - 3\vec{P} \cdot \vec{r} \frac{1}{r^4} \frac{x_i}{r} \\ &= \frac{P_j \delta_{ij}}{r^3} - 3\vec{P} \cdot \vec{r} \frac{x_i}{r^5} = \frac{P_i}{r^3} - 3\vec{P} \cdot \vec{r} \frac{x_i}{r^5} \\ &= \frac{P_i r^2 - 3\vec{P} \cdot \vec{r} x_i}{r^5}, \end{aligned}$$

de donde

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{P}r^2 - 3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5}. \quad (1.34)$$

Note que con esta notación la divergencia de un vector  $\vec{E}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x^i} = \frac{\partial E_i}{\partial x^i} = \partial_i E_i. \end{aligned} \quad (1.35)$$

También se puede probar la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (fg\vec{A}) = g(\vec{\nabla}f) \cdot \vec{A} + f(\vec{\nabla}g) \cdot \vec{A} + fg(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (1.36)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (fg\vec{A}) &= \partial_i (fgA_i) = (\partial_i f)gA_i + f(\partial_i g)A_i + fg(\partial_i A_i) \\ &= g(\vec{\nabla}f) \cdot \vec{A} + f(\vec{\nabla}g) \cdot \vec{A} + fg(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

### 1.3. Producto vectorial y el tensor de Levi-Civita

Otra operación importante entre vectores es el producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{k}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

es decir

$$\left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_1 = (A_2B_3 - A_3B_2), \quad (1.39)$$

$$\left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_2 = (A_3B_1 - A_1B_3), \quad (1.40)$$

$$\left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_3 = (A_1B_2 - A_2B_1). \quad (1.41)$$

Note que en la componente  $(\vec{A} \times \vec{B})_1$  no está  $A_1$  ni  $B_1$ . De hecho, esto también ocurre para las demás componentes, es decir, en la componente  $(\vec{A} \times \vec{B})_i$  no está la componente  $A_i$  ni la componente  $B_i$ .

Anteriormente vimos que el producto escalar se puede escribir en términos de una matriz, veamos si con el producto vectorial ocurre lo mismo. Consideremos la matriz antisimétrica

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Con esta matriz, las igualdades (1.39)-(1.41) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_1 &= (A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{ab} A_a B_b, \quad a, b = 2, 3, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_2 &= (A_3 \ A_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{cd} A_c B_d, \quad c, d = 3, 1, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_3 &= (A_1 \ A_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{ef} A_e B_f, \quad e, f = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Note que la matriz (1.42) está en dos dimensiones, mientras que el espacio es tridimensional. Así es más conveniente ocupar una generalización de (1.42) en tres dimensiones, la cual denotaremos con

$$\epsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.46)$$

En principio, para reproducir el productur vectorial basta que  $\epsilon_{ijk}$  sea antisimétrico en las dos últimas entradas. Sin embargo, como en  $(\vec{A} \times \vec{B})_i$  no está  $A_i$  ni  $B_i$ , pediremos que  $\epsilon_{ijk}$  sea antisimétrico también en las dos primeras entradas. Es decir, pediremos las propiedades

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}, \quad \epsilon_{123} = 1. \quad (1.47)$$

Note que esto implica que, para cualquier  $i$  y  $k$ , se cumpla

$$\epsilon_{iik} = -\epsilon_{iik} = 0, \quad (1.48)$$

de donde

$$\epsilon_{iki} = -\epsilon_{kii} = 0. \quad (1.49)$$

Es decir, las componentes de  $\epsilon_{ijk}$  con dos índices repetidos tienen valor cero. Por lo tanto, las únicas componentes de  $\epsilon_{ijk}$  no nulas tienen índices diferentes, ocupando las propiedades de  $\epsilon_{ijk}$  (1.47) se puede ver que éstas son

$$\epsilon_{123} = 1, \quad (1.50)$$

$$\epsilon_{132} = -\epsilon_{123} = -1, \quad (1.51)$$

$$\epsilon_{213} = -\epsilon_{123} = -1, \quad (1.52)$$

$$\epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = 1, \quad (1.53)$$

$$\epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = 1, \quad (1.54)$$

$$\epsilon_{321} = -\epsilon_{312} = -1. \quad (1.55)$$

Claramente, todos estos valores se obtienen de permutar los índices de  $\epsilon_{123}$ . Al símbolo (1.46) se le llama **tensor de Levi-Civita**. Ahora veremos que este tensor es útil para expresar el producto vectorial. Definamos

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (1.56)$$

Veamos que esta igualdad es correcta, para la primera componente tenemos

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k = \sum_{k=1}^3 (\epsilon_{11k} A_1 B_k + \epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k) \\ &= \sum_{k=1}^3 (\epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k) \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$= \epsilon_{121} A_2 B_1 + \epsilon_{122} A_2 B_2 + \epsilon_{123} A_2 B_3 \quad (1.58)$$

$$+ \epsilon_{131} A_3 B_1 + \epsilon_{132} A_3 B_2 + \epsilon_{133} A_3 B_3 \quad (1.59)$$

$$= \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \quad (1.60)$$

$$= A_2 B_3 - A_3 B_2. \quad (1.61)$$

Este cálculo es más fácil si se ocupan las propiedades de  $\epsilon_{ijk}$ . En efecto, si se tiene  $\epsilon_{1jk}$ , los únicos valores que puede tomar  $j$  son 2 ó 3 y  $k$  solo puede tomar los valores 3 ó 2. Por lo que,

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \\ &= A_2 B_3 - A_3 B_2. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Para las demás componentes tenemos

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{2jk} A_j B_k = \epsilon_{213} A_1 B_3 + \epsilon_{231} A_3 B_1 \\ &= A_3 B_1 - A_1 B_3, \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_3 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{3jk} A_j B_k = \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{321} A_2 B_1 \\ &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Como podemos ver, la definición de producto vectorial (1.56) coincide con (1.38).

Con el símbolo  $\epsilon_{ijk}$  es más económico escribir un producto vectorial. Por ejemplo el momento angular se puede escribir como

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k. \quad (1.65)$$

Mientras que el rotacional se puede escribir como

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (1.66)$$

Además el momento el angular cuántico,  $\vec{L} = -i\hbar \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)$ , se escribe

$$L_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} r_j \partial_k. \quad (1.67)$$

El tensor de Levi-Civita no es solo otra forma de expresar el producto vectorial, también es útil para simplificar los cálculos.

## 1.4. El tensor de Levi-Civita y las matrices

Vimos que con el tensor de Levi-Civita se puede expresar el producto vectorial de forma sencilla. Este tensor también se puede relacionar con las matrices. Se tienen resultados particularmente interesantes con las matrices antisimétricas y simétricas.

### 1.4.1. El tensor de Levi-Civita y las matrices antisimétricas

Cualquier matriz antimétrica de  $3 \times 3$  se puede escribir como

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Con las componentes no nulas de esta matriz se puede formar el vector  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ . Note que si hacemos la contracción de  $\epsilon_{ijk}$  con  $B_i$  se tiene  $\epsilon_{ijk}B_k$  que es un objeto con dos índices libres, es decir es una matriz. Considerando las propiedades (1.47) se tiene

$$\epsilon_{ijk}B_k = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{123}B_3 & \epsilon_{132}B_2 \\ \epsilon_{213}B_3 & 0 & \epsilon_{231}B_1 \\ \epsilon_{312}B_2 & \epsilon_{321}B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = M_{ij} \quad (1.69)$$

Por lo tanto, cualquier matriz antisimétrica  $M$  de  $3 \times 3$  se puede poner en término del tensor de Levi-Civita y un vector  $B$ :

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k. \quad (1.70)$$

### 1.4.2. El tensor de Levi-Civita y matrices simétricas

Hasta aquí hemos ocupado  $\epsilon_{ijk}$  con vectores. Pero también lo podemos emplear con matrices de  $3 \times 3$ . En efecto, dada la matriz  $M_{ij}$  podemos definir

$$V_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}M_{jk} = \epsilon_{ijk}M_{jk}. \quad (1.71)$$

Para evitar confusiones notemos que la contracción de los índices de  $\epsilon_{ijk}$  se puede escribir de diferentes forma. Por ejemplo,

$$V_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}M_{jk} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ikj}M_{kj}. \quad (1.72)$$

Esta igualdad no se obtiene por un intercambio de índices en  $\epsilon_{ijk}$ . Se obtiene por renombrar al mismo tiempo los dos últimos índice de  $\epsilon_{rst}$  y los dos índices de  $M_{ab}$ . Con la convención de Einstein esta igualdad se escribe

$$V_i = \epsilon_{ijk}M_{jk} = \epsilon_{ikj}M_{kj}. \quad (1.73)$$

Un resultado de este hecho trivial es que si  $M_{ij}$  es una matriz simétrica entonces la contracción con  $\epsilon_{ijk}$  es cero, es decir,

$$M_{ij} = M_{ji} \implies \epsilon_{ijk}M_{jk} = 0. \quad (1.74)$$

Esto se debe a que

$$\epsilon_{ijk}M_{jk} = -\epsilon_{ikj}M_{jk} = -\epsilon_{ikj}M_{kj} = -\epsilon_{ijk}M_{jk}. \quad (1.75)$$



En la primera igualdad, se empleo que  $\epsilon_{ijk}$  es antisimétrico, en la segunda que  $M_{jk}$  es simétrica, en la tercera la igualdad (1.73). Por lo tanto,  $\epsilon_{ijk}M_{jk} = -\epsilon_{ijk}M_{jk}$  y se cumple (1.74).

Por ejemplo, con cualquier vector  $A_i$  se puede forma la matriz  $M_{ij} = A_i A_j$ . Esta matriz es simétrica, pues

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} A_1 A_1 & A_1 A_2 & A_1 A_3 \\ A_2 A_1 & A_2 A_2 & A_2 A_3 \\ A_3 A_1 & A_3 A_2 & A_3 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_1 & A_2 A_1 & A_3 A_1 \\ A_1 A_2 & A_2 A_2 & A_3 A_2 \\ A_1 A_3 & A_2 A_3 & A_3 A_3 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Esto implica que

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0. \quad (1.77)$$

En efecto, ocupando la definición de producto escalar y que la matriz  $M_{ij} = A_i A_j$  es simétrica se cumple

$$0 = \epsilon_{ijk} A_j A_k = (\vec{A} \times \vec{A})_i. \quad (1.78)$$

Otra matriz simétrica está dada por  $M_{ij} = \partial_i \partial_j$ . Esto implica que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi) = 0. \quad (1.79)$$

Pues,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \phi)_k = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0. \quad (1.80)$$

También se puede mostrar la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (1.81)$$

En efecto, como  $M_{ij} = \partial_i \partial_j$  es simétrica se llega a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \partial_i (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \\ &= \epsilon_{kij} \partial_i \partial_j A_k = 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Esta identidad tiene implicaciones en las ecuaciones de Maxwell.

### 1.4.3. Conservación de carga

Un hecho experimental bien conocido es que la carga se conserva. Veamos si las ecuaciones de Maxwell son compatibles con este hecho. Para esto ocuparemos la ley de Gauss (1.1) y la ley de Ampère (1.4). De la ley de Gauss obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.83)$$

y ocupando la ley de Ampère se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{J}). \quad (1.84)$$

Ahora, considerando Eq. (1.81) tenemos que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ , de donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.85)$$

que es la llamada ecuación de continuidad. Integrando sobre un volumen  $V$  la ecuación (1.85) y ocupando el teorema de Gauss (1.6) se encuentra

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int dV \rho \right) = \int dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\partial V} ds \vec{J} \cdot \hat{n}. \quad (1.86)$$

Si el volumen de integración es suficientemente grande, el último término de (1.86) es cero y se obtiene

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0, \quad (1.87)$$

es decir, la carga total se conserva en el tiempo.

## 1.5. Triple producto escalar

Algunas identidades vectoriales son fáciles de demostrar con la convención Einstein y el símbolo de Levi-Civita. Por ejemplo el triple producto escalar

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}), \quad (1.88)$$

que se demuestra simplemente

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = C_k (\epsilon_{kij} A_i B_j) \\
&= C_k (\vec{A} \times \vec{B})_k = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \\
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = -B_j \epsilon_{jik} A_i C_k \\
&= B_j \epsilon_{jki} C_k A_i = B_j (\vec{C} \times \vec{A})_j = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}). \quad (1.89)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (1.88). Note que ocupando la regla del triple producto escalar y la igualdad  $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ , se encuentra

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{A}) = 0. \quad (1.90)$$

Si en lugar del vector constante  $\vec{C}$  se tiene el operador  $\vec{\nabla}$ , la identidad del triple producto escalar ya no es válido. En este caso se cumple la identidad

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}. \quad (1.91)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i B_i = (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) B_i = \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k) B_i \\
&= \epsilon_{ijk} [\partial_j (A_k B_i) - A_k \partial_j B_i] = \partial_j (\epsilon_{jki} A_k B_i) + (\epsilon_{kji} \partial_j B_i) A_k \\
&= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}. \quad (1.92)
\end{aligned}$$

Otra identidad que se puede mostrar ocupando sólo las propiedades del tensor de Levi-Civita es

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.93)$$

Pues

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) = \epsilon_{ijk} (\partial_j \phi) A_k + \phi \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\
&= (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A})_i + (\phi \vec{\nabla} \times \vec{A})_i. \quad (1.94)
\end{aligned}$$

En la próxima sección veremos implicaciones de estas propiedades vectoriales.

## 1.6. Aplicaciones del Triple producto escalar

Algunas de las identidades de la sección anterior tienen consecuencias importantes para las ecuaciones de Maxwell, veamos cuales son.

### 1.6.1. Energía Cinética

Ocupando (1.90) en la fuerza de Lorentz se encuentra

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \left( e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = e\vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (1.95)$$

esto quiere decir que el campo magnético no hace trabajo.

Ahora, recordemos que la derivada temporal de la energía cinética es

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} v^2 \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.96)$$

Para el caso particular de la fuerza de Lorentz se tiene

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (1.97)$$

Ahora, suponiendo que no tenemos una carga si no una distribución de cargas  $\rho$  en un volumen  $V$ , como  $dq = \rho d^3x$ ,

$$dq\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v})d^3x = \vec{E} \cdot \vec{J}d^3x. \quad (1.98)$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}d^3x. \quad (1.99)$$

Para este razonamiento solo hemos ocupado la fuerza de Lorentz. Posteriormente veremos lo que dicen las ecuaciones de Maxwell.

### 1.6.2. Conservación de la Energía

Veamos que implicaciones tiene (1.92) en las ecuaciones de Maxwell.

Para esto consideremos la ley de Faraday (1.2) y de Ampère (1.4). Haciendo el producto escalar de  $\vec{B}$  con la ley de Faraday encontramos que

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}. \quad (1.100)$$

Si hacemos el producto escalar de  $\vec{E}$  con la ley de Ampère se llega a

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}. \quad (1.101)$$

Restando estas dos ecuaciones y ocupando la identidad (1.92) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) &= -\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} \\ &= -\vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}).\end{aligned}\quad (1.102)$$

Al vector

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.103)$$

se le llama vector de Poynting. Ahora, integrando (1.102) sobre un volumen  $V$  y ocupando la teorema de Gauss (1.6) se encuentra

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{cin}) = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} da, \quad (1.104)$$

donde

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (1.105)$$

Como podemos ver, además de la energía cinética, las ecuaciones de Maxwell nos dicen que hay otra energía que se debe a los campos eléctricos y magnéticos dada por  $\mathcal{E}_{em}$ , a esta energía se le llama energía electromagnética. Al término

$$\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} da$$

se interpreta como flujo de energía. Si el volumen es suficientemente grande de tal forma que no haya flujo de energía en su frontera, (1.104) implica

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{cin} = \text{cte}, \quad (1.106)$$

es decir, la energía total se conserva.

## 1.7. Contracción de dos tensores de Levi-Civita

El tensor  $\delta_{ij}$  es simétrico mientras que  $\epsilon_{ijk}$  es totalmente antisimétrico. Sin embargo estos dos tensores están relacionados. Primero notemos que en dos dimensiones se cumple

$$\epsilon_{ik} \epsilon_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\delta_{ij}. \quad (1.107)$$

En tres dimensiones se cumple la identidad

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.108)$$

Para mostrar esto definamos el símbolo

$$M_{ijlm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.109)$$

Debido a que  $\delta_{ab}$  es un tensor simétrico, se tienen la propiedades

$$M_{jilm} = \delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{il} = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = -M_{ijlm}, \quad (1.110)$$

$$M_{ijml} = \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm} = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = -M_{ijlm}, \quad (1.111)$$

es decir,

$$M_{ijlm} = -M_{jilm} = -M_{ijml}. \quad (1.112)$$

En particular por la antisimetría se tiene  $M_{iilm} = M_{ijmm} = 0$ . Además, claramente  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$  es antisimétrico si hacemos una permutación en  $(ij)$  ó  $(lm)$ , es decir

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = -\epsilon_{jik} \epsilon_{klm} = -\epsilon_{ijk} \epsilon_{kml}. \quad (1.113)$$

Las igualdades (1.112) y (1.113) nos indican que si (1.108) se cumple para una cuarteta ordenada  $(ijml)$ , también se cumple para las cuartetas ordenadas  $(jilm)$ ,  $(ijml)$ .

Note si  $i = j$ , (1.108) toma la forma  $0 = 0$ . Así, los valores que falta por probar son  $i \neq j$ . De la definición (1.109) es claro que  $M_{ijlm}$  es diferente de cero sólo si  $i = l, j = m$  ó  $i = m, j = l$ , que son las cuartetas ordenadas  $(ijij)$  y  $(ijji)$ . Esta propiedad también la tiene la cantidad  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ . En efecto, recordemos que los índices  $i, j, k, l, m$  sólo pueden tomar los valores  $(1, 2, 3)$ , además en la suma  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$  los únicos términos que contribuyen son tales que  $i \neq j, i \neq k, j \neq k$  y  $k \neq l, k \neq m, l \neq m$ . Estas condiciones implican que  $i = m, l = j$  ó  $i = l, j = m$ . Es decir las únicas cuartetas ordenadas que dan resultados no nulos en  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$  son  $(ijij)$  y  $(ijji)$ .

Como probar (1.108) para el caso  $(ijji)$  es equivalente a probarla para el caso  $(ijji)$ , sólo probaremos los caso  $(ijij) = (1212), (1313), (2323)$ .

Si  $(ijij) = (1212)$ , se tiene

$$\epsilon_{12k}\epsilon_{k12} = \epsilon_{123}\epsilon_{312} = 1, \quad M_{1212} = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} = 1. \quad (1.114)$$

Por lo tanto, (1.108) se cumple.

Si  $(ijij) = (1313)$ , se encuentra

$$\epsilon_{13k}\epsilon_{k13} = \epsilon_{132}\epsilon_{213} = 1, \quad M_{1313} = \delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}\delta_{31} = 1. \quad (1.115)$$

Por lo tanto, (1.108) se cumple.

Si  $(ijij) = (2323)$ , se llega a

$$\epsilon_{23k}\epsilon_{k23} = \epsilon_{231}\epsilon_{123} = 1, \quad M_{2323} = \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32} = 1. \quad (1.116)$$

Por lo tanto, (1.108) se cumple.

En conclusión la igualdad (1.108) es válida para cualquier  $ijlm$ . Una implicación de (1.108) es

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{mjs} + \epsilon_{sim}\epsilon_{mjl} = \epsilon_{ijm}\epsilon_{mls}. \quad (1.117)$$

En efecto ocupando (1.108) se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm}\epsilon_{mjs} + \epsilon_{sim}\epsilon_{mjl} &= (\delta_{ij}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lj}) + (\delta_{sj}\delta_{il} - \delta_{sl}\delta_{ij}) \\ &= \delta_{il}\delta_{sj} - \delta_{is}\delta_{lj} = \epsilon_{ijm}\epsilon_{mls}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

En la próxima sección veremos la importancia de la igualdad (1.108).

## 1.8. Triple producto vectorial I

Ocupando (1.108), se puede mostrar el llamado triple producto vectorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (1.119)$$

pues

$$\begin{aligned} \left[ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} A_j \left( \vec{B} \times \vec{C} \right)_k = \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= (A_m C_m) B_i - C_i (A_l B_l) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_i - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_i. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Si en lugar de un vector constante se tiene el operador  $\vec{\nabla}$ , la identidad (1.119) ya no es válida. Por ejemplo, si en lugar de  $\vec{B} \times \vec{C}$  se considera  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ , ahora se cumple

$$\left[ (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A} \right]_i = \partial_j \left( A_i A_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} A^2 \right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) A_i. \quad (1.121)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A} \right]_i &= \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j A_k = \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} \partial_l A_m) A_k \\ &= -\epsilon_{ikj} \epsilon_{jlm} (\partial_l A_m) A_k \\ &= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) (\partial_l A_m) A_k \\ &= A_l \partial_l A_i - A_m \partial_i A_m \\ &= \partial_l (A_i A_l) - A_i \partial_l A_l - \frac{1}{2} \partial_i (A_m A_m) \\ &= \partial_l \left( A_i A_l - \frac{1}{2} \delta_{il} A^2 \right) - A_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Con esta identidad posteriormente veremos que se conserva el momento.

## 1.9. Conservación del Momento

Para estudiar la conservación del momento veamos de nuevo la fuerza de Lorentz, la cual se puede escribir como

$$\frac{d\vec{P}_{cin}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (1.123)$$

Si tenemos una distribución  $\rho$  de carga tendremos  $dq = \rho d^3x$ , por lo que un elemento de fuerza está dado por

$$d\vec{F} = \left( \rho \vec{E} + \frac{\rho \vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) d^3x = \vec{\mathcal{F}} d^3x, \quad (1.124)$$

con

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \quad (1.125)$$

la densidad de fuerza mecánica. Así, la fuerza total mecánica es

$$\frac{d\vec{P}_{cin}}{dt} = \vec{F} = \int_V \left( \rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \right) d^3x. \quad (1.126)$$



En este resultado solo se ocupó la fuerza de Lorentz. Veamos que dicen las ecuaciones de Maxwell.

Si hacemos el producto vectorial de  $\vec{E}$  con la ley de Faraday (1.2) se tiene

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \times \vec{E}. \quad (1.127)$$

Si hacemos el producto vectorial de  $\vec{B}$  y con la ley de Ampère (1.4) encontramos

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \left( \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \quad (1.128)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}. \quad (1.129)$$

Sumando esta dos ecuaciones y considerando

$$\frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.130)$$

se llega a

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Además, tomando en cuenta (1.121), la ley de Gauss (1.1) y la ley de inexistencia de monopolos magnéticos (1.3), se tiene

$$\left( (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right)_i = \partial_j \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_i \quad (1.132)$$

$$= \partial_j \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) - 4\pi \rho E_i, \quad (1.133)$$

$$\left( (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right)_i = \partial_j \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_i \quad (1.134)$$

$$= \partial_j \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right). \quad (1.135)$$

Introduciendo estos resultados en (1.131) se llega a

$$\begin{aligned} & \partial_j \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (E^2 + B^2) \right) \\ &= 4\pi \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right)_i. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Antes de continuar definamos la densidad de momento electromagnético como

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (1.137)$$

y el tensor de esfuerzos de Maxwell como

$$\tau_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (E^2 + B^2) \right). \quad (1.138)$$

Entonces, la igualdad (1.136) toma la forma

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} + \mathcal{F}_i = \partial_j \tau_{ji}. \quad (1.139)$$

Integrando esta ecuación sobre un volumen  $V$  se tiene

$$\begin{aligned} \int_V dx^3 \left( \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} + \mathcal{F}_i \right) &= \frac{d}{dt} \left( \int_V dx^3 \mathcal{P}_i \right) + \int_V dx^3 \mathcal{F}_i = \int_V dx^3 \partial_j \tau_{ji} \\ &= \oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Definiremos el momento electromagnético como

$$\vec{P}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \int_V dx^3 \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.141)$$

entonces, consideramos (1.126) se encuentra que

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{P}_{em} + \vec{P}_{cin} \right)_i = \oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da \quad (1.142)$$

Como podemos ver, además del momento cinético, las ecuaciones de Maxwell implican el momento electromagnético  $\vec{P}_{em}$  que solo depende de los campos. También podemos ver que

$$\oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da$$

es un término de fuerza y  $\tau_{ij}n_j$  es una presión. De hecho, si definimos

$$\vec{P}_T = \vec{P}_{cin} + \vec{P}_{em}, \quad F_i = \oint_{\partial V} \tau_{ij}n_j da \quad (1.143)$$

se tiene la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}. \quad (1.144)$$

Ahora, si el volumen de integración es suficientemente grande de tal forma que el término de la derecha sea nulo, la ecuación (1.142) implica

$$(P_{cin} + P_{em})_i = \text{cte} \quad (1.145)$$

que significa que el momento total se conserva.

### 1.9.1. Conservación del momento angular

Tomando en cuenta la ecuación (1.139) se encuentra

$$\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \epsilon_{ijk}x_j \mathcal{F}_i = \epsilon_{ijk}x_j \partial_l \tau_{lk}. \quad (1.146)$$

Considerando que  $\partial_t x_j = 0$  y que  $\tau_{lk}$  es simétrico se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk}x_j \mathcal{P}_k) + \left( \vec{x} \times \vec{\mathcal{F}} \right)_i &= \epsilon_{ijk} (\partial_l (x_j \tau_{lk}) - \tau_{lk} \partial_l x_j) \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_l (x_j \tau_{lk}) - \tau_{lk} \delta_{lj}) \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk}x_j \tau_{lk}) - \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk}x_j \tau_{lk}). \end{aligned} \quad (1.147)$$

Definamos el momento angular electromagnético como

$$\vec{L}_{em} = \int_V dx^3 \vec{x} \times \vec{\mathcal{P}}. \quad (1.148)$$

Además, note que, como  $\vec{\mathcal{F}}$  es una densidad de fuerza,  $\vec{x} \times \vec{\mathcal{F}}$  es una densidad de torca. Por lo que, la torca, que es la deriva temporal del momento angular cinético, es

$$\frac{d\vec{L}_{cin}}{dt} = \int_V dx^3 \vec{x} \times \vec{\mathcal{F}}. \quad (1.149)$$

Así, integrando (1.147) sobre un volumen  $V$  y ocupando el teorema de Gauss, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{em} + \vec{L}_{cin} \right)_i = \oint_{\partial V} (\epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk}) n_l da. \quad (1.150)$$

Si  $V$  es suficientemente grande de tal forma que no haya campo electromagnético en su frontera se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{em} + \vec{L}_{cin} \right)_i = 0. \quad (1.151)$$

Es decir, el momento angular total se conserva.

## 1.10. Triple producto vectorial II

Hay otra versiones del triple producto escalar, una de ellas es la identidad

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.152)$$

Esta propiedad se demuestra de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i \\ &= \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_i. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Con esta identidades porteriormente mostraremos que de las ecuaciones de Maxwell se puede obtener la ecuación de onda.

Otro tipo de triple producto escalar es

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{A} \cdot \nabla \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (1.154)$$

Que se demuestra de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \right)_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} A_l B_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (A_l B_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} B_m \partial_j A_l + \delta_{il} \delta_{jm} A_l \partial_j B_m \\ &\quad - (\delta_{im} \delta_{jl} B_m \partial_j A_l + \delta_{im} \delta_{jl} A_l \partial_j B_m) \\ &= B_j \partial_j A_i + A_i \partial_j B_j - B_i \partial_j A_j - A_j \partial_j B_i \\ &= \left[ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right]_i, \end{aligned}$$

que es la prueba de (1.154).

### 1.10.1. Ecuación de onda

Con identidad (1.153) se puede probar que las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de onda. Por simplicidad veremos solo en caso en que no hay fuentes, por lo que las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.155)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.156)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.157)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.158)$$

De la ley de Faraday (1.156) se obtiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}, \quad (1.159)$$

ocupando la ley de Ampère sin fuentes (1.158) y la identidad (1.153) se llega a

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0. \quad (1.160)$$

Analogamente, aplicando el operador rotacional a la ley de Ampère (1.158) sin fuentes y ocupando la ley de Faraday (1.156) se obtiene

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0. \quad (1.161)$$

Por lo tanto, en el vacío los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda.

## 1.11. Libertad de Norma

Recordemos dos teoremas de cálculo vectorial, el teorema de la divergencia y teorema del rotacional. El teorema de la divergencia nos dice que si  $\vec{a}$  es un campo vectorial tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \quad \implies \quad \exists \quad \vec{b} \quad \text{tal que} \quad \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b}, \quad (1.162)$$

donde  $\vec{b}$  es un campo vectorial. Mientras que el teorema del rotacional establece que si  $\vec{c}$  es un campo vectorial tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{c} = 0 \quad \implies \quad \exists \quad e \quad \text{tal que} \quad \vec{c} = -\vec{\nabla} e, \quad (1.163)$$

donde  $e$  es un campo escalar.

De la ley de inexistencia de monopolos magnéticos (1.3) y del teorema de la divergencia (1.162) se infiere que existe un campo vectorial  $\vec{A}$  tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.164)$$

Sustituyendo este resultado en la ley de Faraday (1.2) obtenemos que

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.165)$$

Ahora, por el teorema del rotacional (1.163) se concluye que existe una campo escalar  $\phi$  tal que

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi. \quad (1.166)$$

Por lo tanto podemos decir que la inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday implican que existe los campos  $\vec{A}$  y  $\phi$  tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = - \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (1.167)$$

Este es un resultado importante. Note que dados los campos  $\vec{E}, \vec{B}$  los campos  $\vec{A}$  y  $\phi$  no son únicos. En efecto, sea  $\chi = \chi(\vec{x}, t)$  un campo escalar arbitrario y definamos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (1.168)$$

Entonces (1.167) implica

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad \vec{E}' = \vec{E}, \quad (1.169)$$

es decir los campos eléctrico y magnético no cambian bajo las transformaciones (1.168). Debido a que  $\chi$  depende del espacio y del tiempo, se dice que las transformaciones (1.168) son locales y se les suele llamar transformaciones de norma.

Ahora, definamos  $U = e^{-i\chi}$ , entonces Eq. (1.168) se puede escribir como

$$\vec{A}' = U^{-1} \left( \vec{A} + i\vec{\nabla} \right) U, \quad \phi' = U^{-1} \left( \phi - i\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) U. \quad (1.170)$$

Esto es interesante pues el conjunto de todas las funciones de la forma  $U = e^{-i\chi}$ , forman un círculo de tamaño unitario y cumple las propiedades algebraicas del grupo llamado  $U(1)$  [?]. Por lo que, se dice que el grupo de norma de la electrodinámica es  $U(1)$ .

El resto de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Gauss Eq. (1.1) y la ley de Ampère (1.4), nos dan la dinámica de los campos  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Si sustituimos (1.167) en (1.1) y (1.4) se obtiene

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{\partial t} = 4\pi\rho, \quad (1.171)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J} - \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}\right). \quad (1.172)$$

Ocupamos la identidad (1.153) se encuentra

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{\partial t} = -4\pi\rho, \quad (1.173)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}. \quad (1.174)$$

Debido a que los campos de norma  $\phi$  y  $\vec{A}$  no son únicos, para trabajar con estos debemos elegir un par de ellos, de un número infinito de posibilidades. Para hacer esto se suele imponer condiciones sobre los campos de norma, una de condiciones más recurridas es la norma de Lorentz que pide que se cumpla la condición

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \quad (1.175)$$

En este caso las ecuaciones (1.173-1.174) toman la forma

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -4\pi\rho, \quad (1.176)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}. \quad (1.177)$$

Que son ecuaciones de onda con fuentes.

Otra condición de norma que se puede ocupar es la llamada condición de Coulomb

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0. \quad (1.178)$$

En este caso las ecuaciones (1.173)-(1.174) toman la forma

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (1.179)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (1.180)$$

Un estudio más detallado sobre las posibles condiciones de norma de la electrodinámica se puede ver en [?].

## 1.12. Representación compleja de las ecuaciones de Maxwell

Cuando no hay fuentes,  $\rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ , las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.181)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.182)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.183)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.184)$$

En este caso podemos definir el vector  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{B}$ , donde  $i^2 = -1$ . Por lo que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (1.185)$$

Claramente estas ecuaciones son invariantes bajo la transformación

$$\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}' = (\vec{E}' + i\vec{B}') = e^{i\alpha} \vec{\mathcal{E}}, \quad \alpha = \text{cte}. \quad (1.186)$$

Esta transformación explícitamente toma la forma

$$\vec{\mathcal{E}}' = (\vec{E}' + i\vec{B}') = e^{i\alpha} \vec{\mathcal{E}} = (\vec{E} \cos \alpha - \vec{B} \sin \alpha) + i(\vec{B} \cos \alpha + \vec{E} \sin \alpha),$$

que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (1.187)$$



Si hay fuentes, las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo estas transformaciones. Para mantener esta invariancia, en 1931 P. M. A Dirac propuso la existencia de cargas y corrientes magnéticas. En este caso se pueden proponer la ecuaciones de Maxwell generalizadas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (1.188)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \left( \frac{4\pi}{c} \vec{J}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \quad (1.189)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m, \quad (1.190)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.191)$$

Definamos  $\rho = \rho_e + i\rho_m$  y  $\vec{J} = \vec{J}_e + i\vec{J}_m$ , entonces las ecuaciones de Maxwell con monopolos magnéticos toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = i \left( \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \right). \quad (1.192)$$

Esta ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la transformación

$$\vec{\mathcal{E}} \rightarrow e^{i\alpha} \vec{\mathcal{E}} = (\vec{E} \cos \alpha - \vec{B} \sin \alpha) + i(\vec{B} \cos \alpha + \vec{E} \sin \alpha), \quad (1.193)$$

$$\rho \rightarrow e^{i\alpha} \rho = (\rho_e \cos \alpha - \rho_m \sin \alpha) + i(\rho_m \cos \alpha + \rho_e \sin \alpha), \quad (1.194)$$

$$\vec{J} \rightarrow e^{i\alpha} \vec{J} = (\vec{J}_e \cos \alpha - \vec{J}_m \sin \alpha) + i(\vec{J}_m \cos \alpha + \vec{J}_e \sin \alpha). \quad (1.195)$$

La fuerza de Lorentz con monopolos magnéticos toma la forma

$$\vec{F} = q_e \vec{E} + q_m \vec{B} + \frac{q_e}{c} \vec{v} \times \vec{B} - \frac{q_m}{c} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (1.196)$$

## Capítulo 2

# Operadores en coordenadas curvilíneas

En este capítulo veremos la expresión de los operadores gradiente, Laplaciano y rotacional en términos de coordenadas curvilíneas. Primero recordaremos algunos resultados de cálculo vectorial en coordenadas cartesianas y después veremos lo propio en coordenadas curvilíneas.

### 2.1. Teoremas de Cálculo Vectorial

**Teorema 1** (De la divergencia): si  $\vec{a}$  es un campo vectorial tal que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ , entonces existe un campo vectorial  $\vec{b}$  que cumple  $\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b}$ .

**Teorema 2** (Del rotacional): si  $\vec{c}$  es un campo vectorial tal que  $\vec{\nabla} \times \vec{c} = 0$ , entonces existe un campo escalar,  $e$ , que satisface  $\vec{c} = -\vec{\nabla} e$ .

**Teorema de Gauss:** Supongamos que tenemos una región de volumen  $V$  cuya frontera es la superficie  $S$ , entonces si  $\vec{F}$  es un campo vectorial suave definido en  $V$  se cumple la igualdad

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \hat{n} da, \quad (2.1)$$

aquí  $\hat{n}$  representa la norma exterior a la superficie.

**Lema de Gauss:** Si  $\vec{B}$  es un campo vectorial suave sobre una región de volumen  $V$  y frontera  $\partial V$ , se cumple

$$\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv = \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}). \quad (2.2)$$

Para probar esta afirmación recordemos que el teorema de Gauss es válido para cualquier campo vectorial suave  $\vec{A}$ . En particular si  $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ , se tiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) dv = \oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da, \quad (2.3)$$

Además ocupando la identidad del triple producto escalar (1.88) se tiene

$$\oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da = \oint_{\partial V} (\hat{n} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} da. \quad (2.4)$$

En particular si  $\vec{C}$  un vector constante se encuentra

$$\oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da = \vec{C} \cdot \oint_{\partial V} (\hat{n} \times \vec{B}) da. \quad (2.5)$$

Si  $\vec{C}$  es constante, también se cumple

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \partial_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = \partial_i (\epsilon_{ijk} B_j C_k) = C_k \epsilon_{ijk} \partial_i B_j \\ &= C_k \epsilon_{kij} \partial_i B_j = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\vec{C}$  es constante

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) dv = \vec{C} \cdot \int_V dv (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (2.6)$$

Así, igualando (2.3) con (2.6) para el caso  $\vec{C}$  constante se llega

$$\vec{C} \cdot \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv = \vec{C} \cdot \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}),$$

es decir

$$\vec{C} \cdot \left[ \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv - \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}) \right] = 0.$$

Esta igualdad es válida para cualquier vector  $\vec{C}$ , por lo tanto se debe cumplir (2.2), que es el llamado lema de Gauss.

**Teorema de Stokes:** Supongamos que tenemos una superficie  $S$  cuya frontera está dada por la curva  $\Gamma$ . Entonces si  $\vec{F}$  es un campo regular sobre  $S$ , se cumple la igualdad

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} da = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

donde  $\vec{l}$  es el vector tangente a  $\Gamma$  y gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

**Lema de Stokes:** si  $\phi$  es un campo escalar que toma valores sobre una superficie  $S$  cuya frontera es  $\Gamma$ , entonces

$$\int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da = \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}. \quad (2.7)$$

Probemos esta igualdad, primero supongamos que  $\vec{A}$  es un vector constante y que  $\phi$  es un campo escalar, entonces de (1.93) se llega a

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A}).$$

Aplicando este resultado y la identidad del triple producto escalar (1.88) se encuentra

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A})) \cdot \hat{n} da &= \int_S (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da = \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{A} da \\ &= \vec{A} \cdot \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Además, de acuerdo al teorema de Stokes, se tiene

$$\int_S (\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A})) \cdot \hat{n} da = \oint_{\Gamma} (\phi \vec{A}) \cdot d\vec{l} = \vec{A} \cdot \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, igualando (2.8) con (2.9) se tiene

$$\vec{A} \cdot \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da = \vec{A} \cdot \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}.$$

Como  $\vec{A}$  es un vector arbitrario, se cumple el lema de Stokes (2.7).

### 2.1.1. Interpretación geométrica de operaciones vectoriales

Supongamos que tenemos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con magnitudes  $A$  y  $B$ . Recordemos que cualquiera dos vectores lo podemos poner en un plano, por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar  $\vec{A} = A(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ ,  $\vec{B} = B(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ . Entonces,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = AB \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Es decir, si  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se tiene

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta. \quad (2.10)$$

Ahora, dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , siempre se pueden construir un paralelogramo, como se muestra en la figura. El área de un paralelogramo es simplemente el producto de la base por la altura. En este caso es

$$a = hA = AB \sin \theta.$$

Esta cantidad se puede relacionar con  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Primero notemos que ocupando el triple producto escalar (1.88), el triple producto vectorial (1.119) y el producto escalar (2.10), se encuentra

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot ((\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}) \\ &= -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B})) \\ &= -\vec{B} \cdot (\vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - A^2 \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \\ &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 \sin^2 \theta = a^2. \end{aligned}$$

Entonces, el área del paralelogramo que forman  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  está dada por

$$a = AB \sin \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|.$$

Por esta razón a  $\vec{A} \times \vec{B}$  se suele llamar vector área. Note que este vector es normal al paralelogramo.

Si tenemos tres vectores  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  con ellos podemos formar un paralelepípedo, como se muestra en la figura. El volumen de un paralelepípedo está dado por el producto de la altura con el área de su base

$$V = ha.$$

De la figura es claro que  $h = C \cos \gamma$ , con  $\gamma$  el ángulo que hace  $\vec{C}$  con la normal de la base del paralelepípedo, es decir con  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Además,  $a = |\vec{A} \times \vec{B}|$ , de donde

$$V = C \cos \gamma |\vec{A} \times \vec{B}| = \left| \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right|.$$

## 2.2. Operadores en coordenadas cartecianas

Un vector tridimensional  $\vec{r} = (x, y, z)$  se puede escribir en diferentes coordenadas. En la base Euclidiana tenemos

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.11)$$

con

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1). \quad (2.12)$$

Para estos vectores el producto escalar es

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0. \end{aligned}$$

Otro vector que se puede construir es

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad (2.13)$$

que nos da el elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.14)$$

Note que la energía cinética está dada por

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

En esta base se tiene los productos vectoriales

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}.$$

Así, se pueden plantear los elementos de área

$$\begin{aligned} d\vec{a}_{xy} &= d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y = (dx\hat{i} \times dy\hat{j}) = dx dy \hat{k}, \\ d\vec{a}_{yz} &= d\vec{r}_y \times d\vec{r}_z = (dy\hat{j} \times dz\hat{k}) = dy dz \hat{i}, \\ d\vec{a}_{zx} &= d\vec{r}_z \times d\vec{r}_x = (dz\hat{k} \times dx\hat{i}) = dz dx \hat{j}, \end{aligned}$$

que forman el vector

$$d\vec{a} = dy dz \hat{i} + dz dx \hat{j} + dx dy \hat{k}. \quad (2.15)$$

Mientras que el elemento de volumen se plantea como

$$dV = d\vec{r}_z \cdot (d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y) = dx dy dz. \quad (2.16)$$

En este caso el operador gradiente es

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}. \quad (2.17)$$

Por lo que un *elemento* de  $\phi$  se puede escribir como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}. \quad (2.18)$$

Además, la divergencia es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (2.19)$$

tomando el caso  $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$  se obtiene el Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.20)$$

Mientras que el rotacional es

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (2.21)$$

Estos resultados los ocuparemos para construir la versión del gradiente, divergencia, Laplaciano y rotacional en coordenadas curvilíneas.

### 2.2.1. Coordenadas Esféricas

Antes de estudiar las coordenadas curvilíneas en general veremos dos casos particulares.

Primero veamos la coordenadas esféricas:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.22)$$

es decir

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ &= r(\cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así,

$$d\vec{r} = \hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi, \quad (2.24)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ &= \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ &= \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + \sin \varphi \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Los cuales cumplen

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = 1, \quad (2.28)$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\theta = 0, \quad (2.29)$$

Por lo que forman una base ortonormal.

Esto implica que el elemento de línea toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

mientras que la energía cinética es

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right). \quad (2.31)$$

Con el producto vectorial se tiene

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r. \quad (2.32)$$

Por lo que los elementos de área son

$$d\vec{a}_{r\theta} = d\vec{r}_r \times d\vec{r}_\theta = (\hat{e}_r dr \times r \hat{e}_\theta d\theta) = r dr d\theta \hat{e}_\varphi, \quad (2.33)$$

$$d\vec{a}_{\varphi r} = d\vec{r}_\varphi \times d\vec{r}_r = (r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi \times \hat{e}_r dr) = r \sin \theta dr d\varphi \hat{e}_\theta, \quad (2.34)$$

$$d\vec{a}_{\theta\varphi} = d\vec{r}_\theta \times d\vec{r}_\varphi = (r \hat{e}_\theta d\theta \times r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r, \quad (2.35)$$



que forman el vector

$$d\vec{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r + r \sin \theta dr d\varphi \hat{e}_\theta + r dr d\theta \hat{e}_\varphi. \quad (2.36)$$

Par este caso el elemento de volumen es

$$dV = d\vec{r}_r \cdot (d\vec{r}_\theta \times d\vec{r}_\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (2.37)$$

a  $d\Omega$  se le llama elemento de ángulo sólido.

Además ocupando (2.25)-(2.27) se encuentra

$$\hat{i} = \cos \varphi \sin \theta \hat{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.38)$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \sin \theta \hat{e}_r + \sin \varphi \cos \theta \hat{e}_\theta + \cos \varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.39)$$

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta. \quad (2.40)$$

### 2.2.2. Coordenadas Cilíndricas

Ahora veamos la transformación de coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (2.41)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \\ &= \rho \cos \varphi \hat{i} + \rho \sin \varphi \hat{j} + z \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De donde,

$$d\vec{r} = \hat{e}_\rho d\rho + \rho \hat{e}_\varphi d\varphi + \hat{e}_z dz, \quad (2.43)$$

con

$$\hat{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}, \quad (2.44)$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}, \quad (2.45)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \hat{k}. \quad (2.46)$$

Estos vectores son ortonormales pues cumplen

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1, \quad (2.47)$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = 0, \quad (2.48)$$

que implica

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (2.49)$$

Así, la energía cinética toma la forma

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.50)$$

Con el producto vectorial tenemos

$$\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho, \quad \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z, \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi. \quad (2.51)$$

Por lo que los elementos de área son

$$\begin{aligned} d\vec{a}_{\rho\varphi} &= d\vec{r}_\rho \times d\vec{r}_\varphi = \rho d\rho d\varphi \hat{e}_z, \\ d\vec{a}_{z\rho} &= d\vec{r}_z \times d\vec{r}_\rho = dz d\rho \hat{e}_\varphi, \\ d\vec{a}_{\varphi z} &= d\vec{r}_\varphi \times d\vec{r}_z = \rho d\varphi dz \hat{e}_\rho, \end{aligned}$$

que definen el vector elemento área

$$d\vec{a} = \rho d\varphi dz \hat{e}_\rho + dz d\rho \hat{e}_\varphi + \rho d\rho d\varphi \hat{e}_z. \quad (2.52)$$

Mientras que el elemento de volumen está dado por

$$dV = d\vec{r}_z \cdot (d\vec{r}_\rho \times d\vec{r}_\varphi) = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.53)$$

## 2.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Ya hemos practicado suficiente, ahora veamos el caso general. Supongamos que tenemos el cambio de coordenadas

$$x = f_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = f_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = f_3(u_1, u_2, u_3), \quad (2.54)$$

es decir

$$\vec{r} = (f_1(u_1, u_2, u_3), f_2(u_1, u_2, u_3), f_3(u_1, u_2, u_3)). \quad (2.55)$$

De donde,

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du^1 + h_2 \hat{e}_2 du^2 + h_3 \hat{e}_3 du^3, \quad (2.56)$$

con

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}, \quad \hat{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}, \quad (2.57)$$

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} \right|. \quad (2.58)$$

Claramente los vectores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  son unitarios. Supondremos que la base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  forma una base ortonormal

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1, \quad (2.59)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0. \quad (2.60)$$

Esto implica el elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (h_1)^2 (du^1)^2 + (h_2)^2 (du^2)^2 + (h_3)^2 (du^3)^2 \quad (2.61)$$

y la energía cinética toma la forma

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} ((h_1)^2 \dot{u}_1^2 + (h_2)^2 \dot{u}_2^2 + (h_3)^2 \dot{u}_3^2). \quad (2.62)$$

También supondremos que  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  forman una base derecha, es decir

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2, \quad (2.63)$$

que implica los elementos de área

$$d\vec{a}_{12} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = h_1 h_2 (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) du^1 du^2 = h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3, \quad (2.64)$$

$$d\vec{a}_{23} = d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3 = h_2 h_3 (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) du^2 du^3 = h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1, \quad (2.65)$$

$$d\vec{a}_{31} = d\vec{r}_3 \times d\vec{r}_1 = h_3 h_1 (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) du^3 du^1 = h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2, \quad (2.66)$$

con el cual se forma el vector

$$d\vec{a} = h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1 + h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2 + h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3. \quad (2.67)$$

Además, el elemento de volumen está dado

$$\begin{aligned} dV &= d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3) = h_1 du^{(1)} \hat{e}_1 \cdot (h_2 du^{(2)} \hat{e}_2 \times h_3 du^{(3)} \hat{e}_3) \\ &= h_1 h_2 h_3 du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Todas estas cantidades son de gran utilidad para construir operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas.

### 2.3.1. Gradiente en coordenadas curvilíneas

Como  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  forma una base, cualquier vector  $\vec{A}$  se puede escribir en términos de ella, es decir,

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3. \quad (2.69)$$

En particular, el vector gradiente se debe escribir como

$$\vec{\nabla}\phi = (\nabla\phi)_1 \hat{e}_1 + (\nabla\phi)_2 \hat{e}_2 + (\nabla\phi)_3 \hat{e}_3. \quad (2.70)$$

De donde, considerando (2.18), se tiene

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \\ &= \left[ (\nabla\phi)_1 \hat{e}_1 + (\nabla\phi)_2 \hat{e}_2 + (\nabla\phi)_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \left[ h_1 \hat{e}_1 du^1 + h_2 \hat{e}_2 du^2 + h_3 \hat{e}_3 du^3 \right] \\ &= (\nabla\phi)_1 h_1 du^1 + (\nabla\phi)_2 h_2 du^2 + (\nabla\phi)_3 h_3 du^3. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Esta cantidad tiene el mismo valor independientemente de las coordenadas en que se calcule. Además en las variables  $u_1, u_2, u_3$  se encuentra

$$d\phi(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial\phi}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial\phi}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial\phi}{\partial u^3} du^3. \quad (2.72)$$

Por lo tanto, como las variables  $u_1, u_2, u_3$  son independientes, igualando (2.72) con (2.71) se llega a

$$(\nabla\phi)_1 h_1 = \frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \quad (\nabla\phi)_2 h_2 = \frac{\partial\phi}{\partial u^2}, \quad (\nabla\phi)_3 h_3 = \frac{\partial\phi}{\partial u^3}, \quad (2.73)$$

es decir,

$$(\nabla\phi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \quad (\nabla\phi)_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u^2}, \quad (\nabla\phi)_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u^3}. \quad (2.74)$$

Así, el gradiente en coordenadas curvilíneas es

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u^3} \hat{e}_3. \quad (2.75)$$

En particular el gradiente en coordenadas esféricas es

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi. \quad (2.76)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas tenemos

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (2.77)$$

### 2.3.2. Divergencia en coordenadas curvilíneas

Para obtener la divergencia en coordenadas curvilíneas primero recordemos el teorema de Gauss, que es

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a}. \quad (2.78)$$

Ocupando los elementos de área (2.15) y volumen (2.16) en coordenadas cartesianas, este teorema se puede escribir como

$$\int_V \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\partial V} (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy). \quad (2.79)$$

Con el elemento de volumen (2.68) en coordenadas curvilíneas se tiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)_c h_1 h_2 h_3 du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)}. \quad (2.80)$$

Mientras que ocupando  $\vec{A}$  y el elemento de área en coordenadas curvilíneas, (2.69) y (2.67), se encuentra

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial V} \left[ A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \\ &\quad \left[ h_2 h_3 \hat{e}_1 du^{(2)} du^{(3)} + h_3 h_1 \hat{e}_2 du^{(3)} du^{(1)} + h_1 h_2 \hat{e}_3 du^{(1)} du^{(2)} \right] \\ &= \oint_{\partial V} \left[ A_1 h_3 h_1 du^{(3)} du^{(2)} + A_2 h_3 h_1 du^{(3)} du^{(1)} + A_3 h_1 h_2 du^{(1)} du^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x &= A_1 h_2 h_3, & \tilde{A}_y &= A_2 h_3 h_1, & \tilde{A}_z &= A_3 h_1 h_2, \\ d\tilde{x} &= du^{(1)}, & d\tilde{y} &= du^{(2)}, & d\tilde{z} &= du^{(3)}. \end{aligned}$$

y considerando la igualdad (2.79) se llega a

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial V} \left[ \tilde{A}_x d\tilde{y} d\tilde{z} + \tilde{A}_y d\tilde{z} d\tilde{x} + \tilde{A}_z d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{A}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{z}} \right) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \\ &= \int_V du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)} \left( \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial (A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial (A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right). \quad (2.81) \end{aligned}$$

Así, igualando (2.80) con (2.81) se llega a

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_c h_1 h_2 h_3 = \left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}}\right), \quad (2.82)$$

es decir

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)_c = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}}\right). \quad (2.83)$$

Esta es la expresión de la divergencia en coordenadas curvilíneas. Para coordenadas esféricas obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2.84)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se llega a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.85)$$

### 2.3.3. Laplaciano en coordenadas curvilíneas

La igualdad (2.83) es válida para cualquier campo vectorial  $\vec{A}$ , en particular si es el gradiente de un campo escalar  $\phi$ :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^3} \hat{e}_3. \quad (2.86)$$

En este caso  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla^2 \phi$ , de donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u^{(1)}} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(1)}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^{(2)}} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u^{(3)}} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(3)}} \right) \right). \end{aligned}$$

Para coordenadas esféricas se tiene

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \quad (2.87)$$

también se puede ocupar

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} (r \phi). \quad (2.88)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se encuentra

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.89)$$

### 2.3.4. Rotacional en coordenadas curvilíneas

El rotacional es un vector, por lo que se debe poder escribir de la forma

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_1 \hat{e}_1 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_2 \hat{e}_2 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_3 \hat{e}_3. \quad (2.90)$$

Para encontrar los coeficientes  $\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i$ , recordemos el teorema de Stokes que es

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{a} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (2.91)$$

En coordenadas cartesianas se tiene

$$\begin{aligned} \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{a} &= \int_S \left[ \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_x dydz + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_y dzdx + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_z dxdy \right] \\ &= \int_S \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dxdy + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy \right] \\ &= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} (A_x, A_y, A_z) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_{\partial S} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Ahora, considerando  $\vec{A}$  y  $d\vec{r}$  en coordenadas generalizadas, (2.69) y (2.56), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial S} (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3) \cdot (h_1 \hat{e}_1 du^{(1)} + h_2 \hat{e}_2 du^{(2)} + h_3 \hat{e}_3 du^{(3)}) \\ &= \int_{\partial S} (A_1 h_1 du^{(1)} + A_2 h_2 du^{(2)} + A_3 h_3 du^{(3)}). \end{aligned}$$

Por lo que definiendo

$$(A'_x, A'_y, A'_z) = (A_1 h_1, A_2 h_2, A_3 h_3), \quad (dx', dy', dz') = (du^{(1)}, du^{(2)}, du^{(3)})$$

y ocupando el teorema de Stokes (2.92), se llega a

$$\int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} (A'_x dx' + A'_y dy' + A'_z dz')$$

$$\begin{aligned}
&= \int_S \left[ \left( \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) dy' dz' + \left( \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) dx' dy' + \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} \right) dx' dy' \right] \\
&= \int_S \left[ \left( \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right) du^{(2)} du^{(3)} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right) du^{(1)} du^{(3)} \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right) du^{(1)} du^{(2)} \right]. \tag{2.93}
\end{aligned}$$

Además, considerando el elemento de área y  $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$  en coordenadas generalizadas, (2.67) y (2.90), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} &= \int_S \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 \hat{e}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 \hat{e}_2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \\
&\quad \left[ h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1 + h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2 + h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3 \right] \\
&= \int_S \left[ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 h_2 h_3 du^2 du^3 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 h_3 h_1 du^3 du^1 \right. \\
&\quad \left. + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 h_1 h_2 du^1 du^2 \right], \tag{2.94}
\end{aligned}$$

igualdando (2.93) con (2.94) se obtiene

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 h_2 h_3 &= \left( \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 h_3 h_1 &= \left( \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 h_1 h_2 &= \left( \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right). \tag{2.95}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right), \tag{2.96}
\end{aligned}$$



que son las componentes del rotacional en coordenadas generalizadas.

En particular para coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_\theta + \\ &\quad \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se llega a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \\ &\quad \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z.\end{aligned}\quad (2.98)$$

## 2.4. Operador momento angular

Para obtener mayor práctica en el manejo de vectores veamos el operador

$$\vec{L} = -i \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} \right). \quad (2.99)$$

Este operador surge de manera natural en mecánica cuántica, pero también es importante en la teoría del potencial, en el grupo de rotaciones y para el estudio de las ondas electromagnéticas.

En coordenadas cartesianas, considerando (2.11) y (2.17), se encuentra

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \hat{L}_x \hat{i} + \hat{L}_y \hat{j} + \hat{L}_z \hat{k} \\ &= -i \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} \right) = -i \left( x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \right) \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \\ &= -i \left[ x \frac{\partial}{\partial y} (\hat{i} \times \hat{j}) + x \frac{\partial}{\partial z} (\hat{i} \times \hat{k}) + y \frac{\partial}{\partial x} (\hat{j} \times \hat{i}) + y \frac{\partial}{\partial z} (\hat{j} \times \hat{k}) \right. \\ &\quad \left. + z \frac{\partial}{\partial x} (\hat{k} \times \hat{i}) + z \frac{\partial}{\partial y} (\hat{k} \times \hat{j}) \right] \\ &= -i \left[ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{k} \right].\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\hat{L}_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (2.100)$$

En coordenadas esféricas, considerando (2.23) y (2.76), llega a

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= -i \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} \right) = -i (r \hat{e}_r) \times \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -i \left( (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -i \left( \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned}$$

es decir

$$\vec{L} = -i \left( \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (2.101)$$

Ocupando esta expresión se puede obtener  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  en coordenadas esféricas. En efecto, considerando (2.25)-(2.27), en (2.101) se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= -i \left[ \left( -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sin \theta} \left( \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\
&= -i \left[ \left( -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{i} \right. \\
&\quad \left. + \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{k} \right],
\end{aligned}$$

por lo que,

$$\hat{L}_x = i \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.102)$$

$$\hat{L}_y = -i \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.103)$$

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.104)$$

Un operador importante es

$$L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \quad (2.105)$$

Este operador es más sugerente en coordenadas esféricas, ocupando (2.101) se encuentra

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \vec{L} \cdot \vec{L} = -i \left( \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \vec{L} \\
&= -i \left( \hat{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \theta} - \frac{\hat{e}_\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned} \quad (2.106)$$

Antes de continuar notemos que  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  dependen de la variable  $u$ , entonces

$$\frac{\partial (\vec{A} \cdot \vec{B})}{\partial u} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial u}, \quad (2.107)$$

además de (2.25)-(2.26) se llega a

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0) = \cos \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \cos \theta \hat{e}_\varphi,$$

Tomando en cuenta esta dos ultimas igualdades, la expresión (2.101) y (2.25)-(2.27) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \theta} &= \frac{\partial (\hat{e}_\varphi \cdot \vec{L})}{\partial \theta} = -i \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \hat{e}_\theta \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (\hat{e}_\theta \cdot \vec{L})}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\hat{e}_\theta)}{\partial \varphi} \cdot \vec{L} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \cos \theta \hat{e}_\varphi \cdot \vec{L} \\ &= i \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Sustituyendo estos resultado en (2.106) se consigue

$$\hat{L}^2 = - \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

además considerando la igualdad

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.109)$$

se llega a

$$\hat{L}^2 = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.110)$$

Note que este resultado el Laplaciano en coordenadas esféricas (2.88) se puede escribir como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2 \phi}{r^2}. \quad (2.111)$$

Este resultado es importante para resolver la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 \phi = 0$ , en coordenadas esféricas.

## Capítulo 3

# El Factorial y la Función Gamma

### 3.1. Función Gamma

Dado un número natural,  $n$ , se define el factorial como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1. \quad (3.1)$$

También se puede definir un producto similar para los primeros  $n$  números pares mediante

$$(2n)!! = (2n) \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2, \quad (3.2)$$

factorizando un 2 de cada término se encuentra

$$(2n)!! = 2^n (n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1) = 2^n n!, \quad (3.3)$$

es decir

$$(2n)!! = 2^n n!. \quad (3.4)$$

Además, el producto de los primeros  $(n+1)$  números impares es

$$(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1. \quad (3.5)$$

Ahora, multiplicando y dividiendo este número por  $(2n)!!$  se encuentra

$$\begin{aligned} (2n+1)!! &= \frac{(2n+1) \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot 2(n-2) \cdot (2n-3) \cdots (5) \cdot (4) \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1)}{(2n) \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdots (4) \cdot (2)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}, \end{aligned}$$

es decir

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}. \quad (3.6)$$

También se puede definir el factorial para cualquier número real o complejo. Para hacer esa definición ocuparemos la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (3.7)$$

Primero notemos que si  $z = 1$  se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1.$$

Mientras que si  $z = \frac{1}{2}$ , con el cambio de variable  $u = t^{1/2}$ , se encuentra

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du \\ &= \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2} dv \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty du dv e^{-(u^2+v^2)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} \right)^{1/2} \\ &= \left( 2\pi \frac{(-)}{2} \int_0^\infty dr \frac{de^{-r^2}}{dr} \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.8)$$

La función  $\Gamma(z)$  tiene las mismas propiedades que el factorial, para ver esto observemos que se cumple

$$e^{-t} t^z = z t^{z-1} e^{-t} - \frac{d}{dt} (e^{-t} t^z), \quad (3.9)$$

que implica

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z), \quad (3.10)$$

es decir

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (3.11)$$

Ocupando de forma reiterada (3.11) se encuentra

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)(z-2)\Gamma(z-2) \\ &= z(z-1)(z-2)\cdots(z-k)\Gamma(z-k), \quad \operatorname{Re}(z-k) > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En particular si  $z$  es un natural,  $n$ , el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $n-1$ , por lo que

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))\Gamma(1) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!,$$

es decir

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (3.13)$$

Así, para cualquier número complejo con  $\operatorname{Re}(z-k) > 0$ , definiremos el factorial como

$$z! = \Gamma(z+1) = z(z-1)(z-2)\cdots(z-k)\Gamma(z-k), \quad \operatorname{Re}(z-k) > 0. \quad (3.14)$$

Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.15)$$

Si queremos saber cuanto vale  $(n + \frac{1}{2})!$  debemos ocupar la definición (3.14). Para este caso es claro que el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $n$ , de donde

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right)! &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n+1)}{2} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-3)}{2} \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!!}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}, \end{aligned}$$

es decir

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

De este resultado se tiene

$$\begin{aligned}\left(n - \frac{1}{2}\right)! &= \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)+1}(n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!(2n)}{2^{2n-1}(n-1)!(2n)} = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

También se puede calcular el factorial para números negativos, por ejemplo

$$\left(\frac{-1}{2}\right)! = \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.16)$$

De hecho, ocupando que (3.11) implica

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (3.17)$$

se puede definir  $\Gamma(z)$  para números negativos. Por ejemplo, si  $z = -\frac{1}{2}$ , se encuentra

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}. \quad (3.18)$$

Similarmente, si  $0 < \epsilon < 1$ , podemos definir

$$\Gamma(-\epsilon) = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{-\epsilon}. \quad (3.19)$$

La parte derecha de esta igualdad tiene sentido pues  $(1-\epsilon) > 0$ , así la parte izquierda tiene sentido.

Ocupando de forma reiterada (3.17) se llega a

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \dots = \\ &= \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+2)(z+3)\dots(z+(k-1))}.\end{aligned} \quad (3.20)$$

Si  $z+k > 0$  la parte derecha de esta igualdad tiene sentido, por lo tanto la parte izquierda está bien definida, aún si  $z < 0$ . Por ejemplo, si  $z$  es de la

forma  $z = -n + \epsilon$ , con  $n$  un natural y  $\epsilon \in (0, 1)$ , tomando  $k = n$  se cumple  $z + k > 0$  y la cantidad

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \Gamma(-n + \epsilon) \\ &= \frac{\Gamma(\epsilon)}{(-n + \epsilon)(-(n - 1) + \epsilon)(-(n - 2) + \epsilon) \cdots (-1 + \epsilon)}\end{aligned}\quad (3.21)$$

está bien definida.

Ahora, es claro que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-n + \epsilon)(-(n - 1) + \epsilon)(-(n - 2) + \epsilon) \cdots (-1 + \epsilon) = (-)^n n!. \quad (3.22)$$

Mientras que de la integral (3.7) se tiene  $\Gamma(0^+) = \infty$  y de (3.19) se encuentra  $\Gamma(0^-) = -\infty$ . Por lo tanto, si  $n$  es un natural se cumple

$$\Gamma(-n^\pm) = (-)^n (\pm) \infty, \quad (3.23)$$

en ambos caso

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0. \quad (3.24)$$

Existen más propiedades de la función  $\Gamma(z)$ , pero las que hemos visto nos bastan para estudiar las funciones de Bessel.



# Capítulo 4

## Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este capítulo veremos una serie de resultados sobre ecuaciones diferenciales que aplicaremos posteriormente.

### 4.1. Teorema de Existencia y unicidad

El primer resultado es sobre la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dY(x)}{dx} + Q(x)Y(x) = R(x). \quad (4.1)$$

Aquí  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  son funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces si  $x_0 \in [a, b]$ , existe una única solución de (4.1) que cumple las condiciones iniciales

$$Y(x_0) = Y_1, \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = Y_2. \quad (4.2)$$

Este resultado lo usaremos sin demostrar.

### 4.2. El Wronskiano

Un concepto de mucha utilidad en el estudio de la independencia de las soluciones de las ecuaciones diferenciales es el Wronskiano. Supongamos que tenemos dos funciones  $f$  y  $g$ , el Wronskiano se define como

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ \frac{df}{dx} & \frac{dg}{dx} \end{vmatrix} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx}g(x), \quad (4.3)$$

note que

$$\frac{dW(f, g)(x)}{dx} = f(x) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(x). \quad (4.4)$$

### 4.3. Independencia lineal

Ahora, si  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY(x)}{dx} + Q(x)Y(x) = 0, \quad (4.5)$$

es decir, si se cumple

$$\frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY_1(x)}{dx} + Q(x)Y_1(x) = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY_2(x)}{dx} + Q(x)Y_2(x) = 0, \quad (4.7)$$

se obtiene

$$Y_2(x) \frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} + P(x)Y_2(x) \frac{dY_1(x)}{dx} + Q(x)Y_2(x)Y_1(x) = 0, \quad (4.8)$$

$$Y_1(x) \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} + P(x)Y_1(x) \frac{dY_2(x)}{dx} + Q(x)Y_1(x)Y_2(x) = 0. \quad (4.9)$$

Al restar estas ecuaciones se llega a

$$Y_2(x) \frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} - Y_1(x) \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} + P(x) \left( Y_2(x) \frac{dY_1(x)}{dx} - Y_1(x) \frac{dY_2(x)}{dx} \right) = 0,$$

que se puede escribir como

$$\frac{dW(Y_1, Y_2)(x)}{dx} + P(x)W(Y_1, Y_2)(x) = 0, \quad (4.10)$$

y su solución es

$$W(Y_1, Y_2)(x) = C e^{-\int P(x) dx}, \quad C = \text{constante}. \quad (4.11)$$

Como la función exponencial nunca se anula, si el Wronskiano es cero en un punto, implica que  $C = 0$ . Por lo tanto, si el Wronskiano es cero en un punto, es cero cualquier otro punto. Claramente también es cierto que si el Wronskiano es diferente de cero en un punto, es diferente de cero en cualquier otro punto. Además, si el Wronskiano es diferente de cero no puede cambiar de signo, pues

de lo contrario tendría que pasar por cero.

Con el Wronskiano se puede obtener información sobre  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$ . En efecto, si  $W(Y_1, Y_2)(x) = 0$ , entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ \frac{dY_1(x)}{dx} & \frac{dY_2(x)}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

tiene solución no trivial y las funciones  $Y_1(x), Y_2(x)$  son linealmente dependientes. Ahora, si  $W(Y_1, Y_2)(x) \neq 0$ , la única solución a (4.12) es la trivial y por lo tanto,  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son linealmente independientes.

Supongamos que  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son soluciones de (4.5) y además son linealmente independientes, entonces podemos afirmar que no se pueden anular en un mismo punto. Esto es verdad, pues si existe  $x_0$  tal que  $Y_1(x_0) = Y_2(x_0) = 0$ , entonces  $W(Y_1, Y_2)(x_0) = 0$ , que no puede ser posible pues  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son linealmente independientes.

## 4.4. Los ceros de las soluciones

Cuando  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son soluciones de (4.5) y además son linealmente independientes, el Wronskiano nos da información sobre los puntos donde se anulan estas funciones. En efecto, supongamos que  $a_1$  y  $a_2$  son ceros sucesivos de  $Y_1(x)$ , es decir  $Y_1(a_1) = Y_1(a_2) = 0$ , con  $a_1 < a_2$  y si  $x \in (a_1, a_2)$  entonces  $Y_1(x) \neq 0$ . Con esta hipótesis podemos afirmar que  $Y_2(x)$  tiene un cero en el intervalo  $(a_1, a_2)$ . Para probar esta afirmación, notemos que la derivada de  $Y_1(x)$  no puede tener el mismo signo en  $a_1$  y  $a_2$ , además

$$W(Y_1, Y_2)(a_1) = -\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_1} Y_1(a_1), \quad (4.13)$$

$$W(Y_1, Y_2)(a_2) = -\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_2} Y_1(a_2). \quad (4.14)$$

Ahora como  $\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_2}$  tiene signo diferente a  $\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_1}$  y el Wronskiano no cambia de signo, entonces  $Y_2(a_1)$  y  $Y_2(a_2)$  tienen signos diferentes. Como  $Y_2(x)$  es continua, existe un punto  $a_3 \in (a_1, a_2)$  tal que  $Y_2(a_3) = 0$ , que es lo que queríamos demostrar.

De hecho, podemos afirmar que si  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$  son soluciones linealmente independientes de (4.5),  $Y_2(x)$  tiene un único cero entre dos ceros sucesivos de  $Y_1(x)$ .

#### 4.4.1. Forma Normal

Para poder estudiar la ecuación diferencial (4.5) en muchos caso es mejor ponerla en un aspecto más conveniente. Por ejemplo, suponiendo que  $Y(x) = u(x)v(x)$ , se cumple

$$\frac{dY(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}, \quad (4.15)$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \frac{d^2u(x)}{dx^2}v(x) + 2\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + u(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (4.16)$$

por lo que (4.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u(x)}{dx^2}v(x) + \left(2\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x)\right)\frac{du(x)}{dx} \\ & + \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dv(x)}{dx} + Q(x)v(x)\right)u(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si pedimos que

$$2\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x) = 0, \quad (4.18)$$

se cumple,

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{P(x)v(x)}{2}, \quad \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \left(-\frac{1}{2}\frac{dP(x)}{dx} + \frac{P^2(x)}{4}\right)v(x). \quad (4.19)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.17) se llega a

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left(Q(x) - \frac{P^2(x)}{4} - \frac{1}{2}\frac{dP(x)}{dx}\right)u(x) = 0. \quad (4.20)$$

A esta ecuación se le llama forma normal de (4.17). Note que la solución de (4.18) es

$$v(x) = ce^{-\frac{1}{2}\int dx P(x)}, \quad c = \text{constante} \quad (4.21)$$

y esta función nunca se anula. Así la información de los ceros de  $Y(x)$  está contenida en  $u(x)$ . Por lo tanto, para estudiar los ceros de las soluciones de (4.5)

es más conveniente estudiar su forma normal (4.20) .

Notablemente la ecuación normal (4.20) es un caso particular de

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, para estudiar los ceros de las soluciones de la ecuación diferencial (4.5) basta estudiar los ceros de la ecuación diferencial (4.22). Antes de entrar en detalles formales observemos que (4.22) se puede escribir como

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = -q(x)Y(x) \quad (4.23)$$

que se puede ver como la segunda ley de Newton donde  $Y(x)$  representa la posición de una partícula y  $q(x)$  una fuerza que cambia punto a punto.

Primero veamos un caso sencillo. Supongamos que  $q(x) = \beta$ , con  $\beta$  una constante, en este caso la ecuación (4.23) toma la forma

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = -\beta Y(x), \quad (4.24)$$

que es la segunda ley de Newton con una fuerza constante centrada en el origen. Si  $\beta > 0$ , la fuerza es atractiva y una partícula bajo su influencia pasa una cantidad infinita de veces por el cero. Es decir, si  $\beta > 0$  las soluciones de (4.24) tienen un número infinito de ceros. Ahora, si  $\beta < 0$  tenemos una fuerza repulsiva y una partícula su influencia a lo más puede pasar una vez por el cero. Por lo tanto podemos, afirmar que, si  $\beta < 0$  las soluciones de (4.24) tienen a lo más un cero.

Ahora veamos un caso más general donde  $q(x)$  tiene signo definido. Primero supongamos que  $q(x) < 0$  para cualquier  $x$  positiva. Entonces afirmamos que la soluciones de (4.22) a lo más tienen un cero. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que, desde el punto de vista físico, la ecuación (4.23) representa una partícula bajo una fuerza repulsiva. Por lo que, si existe  $x_0$  tal que  $Y(x_0) = 0$ , la partícula no puede regresar a la posición  $Y(x_0) = 0$ . Por lo tanto, si  $q(x) < 0$  las soluciones de (4.22) a lo más tienen un cero.

Si  $q(x) > 0$ , podemos afirmar que la soluciones de (4.22) tiene un número infinito de ceros. Primero notemos que, desde el punto de vista físico, la ecuación (4.23) representa una partícula bajo una fuerza atractiva. Supongamos que  $Y(x)$  es una solución con un número finito de cero. Si  $\alpha$  es el máximo de

los ceros, entonces si  $x > \alpha$  la posición  $Y(x)$  debe tener signo definido. Ahora, como la fuerza es atractiva, la partícula debe regresar de nuevo a la posición que tenía en  $\alpha$ , es decir debe regresar a cero. Esto implica que debe existir  $x_1 > \alpha$  donde  $Y(x_1) = 0$ . Por lo tanto,  $\alpha$  no es el máximo de los ceros de  $Y(x)$  y esta función no puede tener un número finito de ceros.

Otra forma de mostrar esta afirmación es la siguiente, como  $\alpha$  es el máximo de los ceros de  $Y(x)$ , entonces si  $x > \alpha$ , la función  $Y(x)$  tiene signo definido. De (4.23) se puede observar que si  $Y(x) > 0$ , entonces la segunda derivada es negativa, lo que quiere decir que la tasa de crecimiento disminuye, es decir  $Y(x)$  decrece y eventualmente llega a cero. Que contradice el hecho de que  $\alpha$  sea el máximo de los ceros de  $Y(x)$ . Ahora si  $Y(x) < 0$ , entonces de (4.23) se puede observar que la segunda derivada es positiva, lo que quiere decir que la tasa de crecimiento aumenta. Por lo tanto,  $Y(x)$  crece y eventualmente llega a cero. Esto contradice el hecho de que  $\alpha$  sea el máximo de los ceros de  $Y(x)$ .

También podemos afirmar que en un intervalo cerrado y acotado las soluciones de (4.23) sólo pueden tener un número finito de ceros. Para probar esta afirmación recordemos el principio de Weierstrass, el cual no dice que una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente. Ahora, supongamos que  $Y(x)$  es solución no trivial de (4.23) y que tiene un número infinito de ceros en el intervalo  $[a, b]$ . Con ese conjunto infinito de ceros se puede formar una sucesión acotada. Por lo que existe una subsucesión,  $\{x_i\}_0^\infty$ , de ceros de  $Y(x)$  que converge en un punto  $x_0$  de  $[a, b]$ . Como  $Y(x)$  es continua, se debe cumplir  $Y(x_0) = 0$ , además

$$\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Y(x_i) - Y(x_0)}{x_i - x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_i - x_0} = 0. \quad (4.25)$$

Así, tenemos una solución de (4.23) que cumple  $Y(x_0) = 0$ ,  $\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$ , por el teorema de unicidad, este resultado implica que  $Y(x) = 0$ . Esto es absurdo, pues supusimos que  $Y(x)$  es una solución no trivial de (4.23). Así, en un intervalo cerrado y acotado, las soluciones de (4.23) sólo pueden tener un número finito de ceros. Que implica que los ceros de  $Y(x)$  deben formar un conjunto numerable.

## 4.5. Teorema de comparación de Sturm

Ahora, supongamos que  $\tilde{q}(x) < q(x)$  y que  $Y(x)$  y  $\tilde{Y}(x)$  son soluciones de las ecuaciones

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2 \tilde{Y}(x)}{dx^2} + \tilde{q}(x)\tilde{Y}(x) = 0. \quad (4.27)$$

Entonces se puede afirmar que  $Y(x)$  tiene un cero entre dos ceros consecutivos de  $\tilde{Y}(x)$ . A esta afirmación se le llama el Teorema de Comparación de Sturm, para su demostración ocuparemos el Wronskiano

$$W(Y, \tilde{Y})(x) = Y(x) \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} - \frac{dY(x)}{dx} \tilde{Y}(x). \quad (4.28)$$

Considerando (4.26) y (4.27) se encuentra

$$\frac{dW(Y, \tilde{Y})(x)}{dx} = Y(x) \frac{d^2 \tilde{Y}(x)}{dx^2} - \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \tilde{Y}(x) = (q(x) - \tilde{q}(x)) \tilde{Y}(x)Y(x) \quad (4.29)$$

Supongamos que  $a_1, a_2$  son ceros consecutivos de  $\tilde{Y}(x)$ . Es decir  $a_1 < a_2$  con  $\tilde{Y}(a_1) = \tilde{Y}(a_2) = 0$  y si  $x \in (a_1, a_2)$  entonces  $\tilde{Y}(x) \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\tilde{Y}(x) > 0$  en  $(a_1, a_2)$ , esto implica

$$\left. \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} \right|_{a_1} > 0 \quad \left. \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} \right|_{a_2} < 0. \quad (4.30)$$

También se cumple

$$W(Y, \tilde{Y})(a_1) = Y(a_1) \left. \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} \right|_{a_1}, \quad W(Y, \tilde{Y})(a_2) = Y(a_2) \left. \frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} \right|_{a_2}. \quad (4.31)$$

De (4.29) es claro que el signo de  $\frac{dW(Y, \tilde{Y})(x)}{dx}$  en  $[a_1, a_2]$  solo depende del signo de  $Y(x)$ . Supongamos que  $Y(x)$  no tiene ceros en ese intervalo, si  $Y(x) > 0$  entonces  $(q(x) - \tilde{q}(x))Y(x)\tilde{Y}(x) > 0$ . Note que al integrar (4.29) se encuentra que  $W(a_2) > W(a_1)$ . Mientras que de (4.31) se tiene  $W(a_1) > 0$  y  $W(a_2) < 0$ , lo cual es absurdo. Así,  $Y(x)$  no puede tener signo positivo en el intervalo  $[a_1, a_2]$ . Ahora, si  $Y(x) < 0$  en  $[a_1, a_2]$ , entonces  $(q(x) - \tilde{q}(x))Y(x)\tilde{Y}(x) < 0$  y al integrar (4.29) se encuentra que  $W(a_2) < W(a_1)$ . Pero de (4.31) se tiene  $W(a_1) < W(a_2)$ , lo cual es absurdo. Así,  $Y(x)$  no puede tener solo signo negativo en el intervalo  $[a_1, a_2]$ . Esto implica que debe cambiar de signo en el

intervalo  $[a_1, a_2]$  y por lo tanto debe tener un cero en ese intervalo.

Por ejemplo, supongamos que tenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2 \tilde{Y}(x)}{dx^2} + k^2 \tilde{Y}(x) = 0, \quad k = \text{constante}, \quad (4.33)$$

y se cumple  $q(x) > k^2$ . Como las soluciones de (4.33) tienen ceros en los intervalos  $\left[\frac{n\pi}{k}, \frac{(n+1)\pi}{k}\right]$ , podemos afirmar que las soluciones de (4.32) también tienen ceros en esos intervalos.

Los resultados que hemos visto nos sirven para estudiar los ceros de la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Y(x) = 0. \quad (4.34)$$

A las soluciones de esta ecuación se les llaman funciones de Bessel. En este caso la forma normal es

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right) u(x) = 0. \quad (4.35)$$

De donde

$$q(x) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}. \quad (4.36)$$

Note que si  $x > (\sqrt{4\nu^2 - 1})/2$ , se tiene  $q(x) > 0$ . Por lo tanto, las funciones de Bessel tienen un número infinito de ceros.

Las funciones de Bessel las podemos comparar con las soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) = 0, \quad (4.37)$$

cuyas soluciones son  $\{\sin x, \cos x\}$ . La distancia entre dos ceros consecutivos para estas funciones es  $\pi$ .

Ahora, si  $\nu \leq \frac{1}{2}$ , se cumple

$$1 < 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}. \quad (4.38)$$



Entonces cada intervalo de longitud  $\pi$  tiene al menos un cero de las soluciones de la ecuación de Bessel. Para el caso  $\nu = \frac{1}{2}$ , la ecuación normal de Bessel (4.35) se reduce a (4.37) y la distancia entre los ceros es exactamente  $\pi$ . Ahora, si  $\frac{1}{2} < \nu$ , se cumple

$$1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} < 1, . \quad (4.39)$$

Esto implica que entre dos ceros sucesivos de las soluciones de (4.37) hay a lo más un cero de las funciones de Bessel. En efecto, supongamos que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son ceros sucesivos de (4.37) y que en  $(\alpha_1, \alpha_2)$  hay dos ceros de las funciones de Bessel. Como se cumple (4.39), debe haber un cero de las soluciones de (4.37), lo cual es absurdo, pues supusimos que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son ceros sucesivos de las soluciones de (4.37). Por lo tanto, si  $\frac{1}{2} < \nu$ , en cada intervalo de longitud  $\pi$  hay a lo más un cero de las funciones de Bessel.

## 4.6. Problema de Sturm-Liouville

Una ecuación diferencial que surge en diferentes problemas de física y matemáticas es la ecuación de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + (\lambda q(x) + r(x)) \psi(x) = 0. \quad (4.40)$$

Donde  $q(x), p(x), r(x)$  son funciones reales,  $q(x)$  es una función positiva en el intervalo  $(a, b)$  y  $\lambda$  es una constante real. El problema consiste en contrar las constantes  $\lambda$  y funciones  $\psi(x)$  que resuelven (4.40).

La ecuación (4.40) se suele resolver con las condiciones de Dirichlet

$$\psi(a) = \psi(b) = 0, \quad (4.41)$$

o las de Neumann

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0. \quad (4.42)$$

Si no se cumple ninguna de estas condiciones se puede pedir que  $p(x)$  cumpla

$$p(a) = p(b) = 0. \quad (4.43)$$

La afirmación importante aquí es que si  $\psi_{\lambda_1}(x)$  es solución de (4.40) con  $\lambda_1$  y  $\psi_{\lambda_2}(x)$  es solución de (4.40) con  $\lambda_2$ , y además se satisfacen alguna de las condiciones (6.72)-(4.43), entonces se cumple

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0.$$

Para probar esta afirmación ocuparemos que se cumple

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) + (\lambda_1 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Al sacar el complejo conjugado de la segunda ecuación se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}^*(x) = 0. \quad (4.45)$$

Además, multiplicando  $\psi_{\lambda_2}^*(x)$  por (4.44) y  $\psi_{\lambda_1}(x)$  por (4.45) se consigue

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) + (\lambda_1 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_1}(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) &= 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, considerando

$$f(x) \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(x)g(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x)$$

se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) - p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \\ + \left( \lambda_1 q(x) + r(x) \right) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( p(x) \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) - p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \\ + \left( \lambda_2 q(x) + r(x) \right) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Restando estas dos últimas ecuaciones se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( p(x) \left( \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} - \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) \right) \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2) q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0. \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación en el intervalo  $[a, b]$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \left( p(x) \left( \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} - \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) \right) \Big|_a^b \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0. \end{aligned}$$

Suponiendo que las soluciones satisfacen las condiciones de Dirichlet, de Neumann o bien que  $p(x)$  se anule en la frontera, se consigue

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0,$$

que es lo que queríamos probar.

En particular note que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  se tiene

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (4.46)$$

Además, se puede ver que la integral

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = \alpha_\lambda, \quad (4.47)$$

es positiva, es decir  $\alpha_\lambda > 0$ . Por lo que, si  $\alpha_\lambda < \infty$ , el conjunto de funciones

$$\frac{\tilde{\psi}_\lambda(x)}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \quad (4.48)$$

cumplen

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \tilde{\psi}_{\lambda_2}(x) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.49)$$

Se dice que las soluciones de (4.40) que satisfacen alguna de las condiciones (6.72)-(4.43) son un conjunto de funciones ortonormales con función de peso  $q(x)$ .

# Capítulo 5

## Funciones de Bessel

En este capítulo estudiaremos la ecuación de Bessel y sus soluciones, que se llaman funciones de Bessel. Las funciones de Bessel tienen aplicaciones en diversos problemas de mecánica cuántica, electrodinámica y otras disciplinas.

### 5.1. Ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel es

$$\frac{d^2 R(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) R(z) = 0, \quad (5.1)$$

que se puede escribir de la forma

$$z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + z \frac{dR(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) R(z) = 0. \quad (5.2)$$

Para resolver esta ecuación ocuparemos el *Método de Frobenius*, es decir pondremos soluciones de la forma

$$R(z) = z^m \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m}, \quad a_0 \neq 0. \quad (5.3)$$

De donde

$$\begin{aligned} -\nu^2 R(z) &= \sum_{n \geq 0} -\nu^2 a_n z^{n+m} = -\nu^2 a_0 z^m - \nu^2 a_1 z^{m+1} - \sum_{n \geq 2} \nu^2 a_n z^{n+m}, \\ z^2 R(z) &= z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m} = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m+2} = \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^{n+m}, \\ z \frac{dR(z)}{dz} &= z \sum_{n \geq 0} (n+m) a_n z^{n+m-1} = \sum_{n \geq 0} (n+m) a_n z^{n+m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ma_0 z^m + (m+1)a_1 z^{m+1} + \sum_{n \geq 2} (n+m)a_n z^{n+m}, \\
z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} &= z^2 \sum_{n \geq 0} (n+m)(n+m-1)a_n z^{n+m-2} \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+m)(n+m-1)a_n z^{n+m} \\
&= m(m-1)a_0 z^m + (m+1)ma_1 z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} (n+m)(n+m-1)a_n z^{n+m}.
\end{aligned}$$

Considerando estas cuatro igualdades en (5.2) y tomando en cuenta

$$(n+m)(n+m-1) + (n+m) = (n+m)^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned}
&z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + z \frac{dR(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) R(z) = \\
&= a_0 (-\nu^2 + m + m(m-1)) z^m + a_1 (-\nu^2 + (m+1) + (m+1)m) z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} \left[ [(n+m)(n+m-1) + (n+m) - \nu^2] a_n + a_{n-2} \right] z^{n+m} \\
&= a_0 (m^2 - \nu^2) z^m + a_1 ((m+1)^2 - \nu^2) z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} (a_{n-2} + ((n+m)^2 - \nu^2) a_n) z^{n+m} = 0, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

que se debe cumplir para cualquier  $z$ . Esto implica

$$a_0(m^2 - \nu^2) = 0, \tag{5.5}$$

$$a_1((m+1)^2 - \nu^2) = 0, \tag{5.6}$$

$$a_{n-2} + a_n((n+m)^2 - \nu^2) = 0. \tag{5.7}$$

Como  $a_0 \neq 0$ , (5.5) induce

$$m^2 = \nu^2, \quad m = \pm \nu, \tag{5.8}$$

introduciendo este resultado en (5.6) se llega a

$$a_1 = 0. \tag{5.9}$$

Además, considerando

$$(n+m)^2 - \nu^2 = (n \pm \nu)^2 - \nu^2 = n^2 \pm 2n\nu + \nu^2 - \nu^2 = n(n \pm 2\nu) \tag{5.10}$$

en (5.7) obtiene

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\nu)}. \quad (5.11)$$

Apartir de esta igualdad y ocupando (5.9) se llega a  $a_3 = 0$ , que a su vez implica  $a_5 = 0$ . Es claro que en general  $a_{2n+1} = 0$ . Así, los únicos  $a_n$  diferentes de cero son de la forma

$$a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{2n(2n \pm 2\nu)} = \frac{(-)}{2^2 n(n \pm \nu)} a_{2(n-1)}. \quad (5.12)$$

Note que hay un problema si  $\nu$  es un natural y se considera el signo negativo en (5.12), después trataremos esta cuestión. Observe que (5.12) se puede escribir como

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-)}{2^2 n(n \pm \nu)} a_{2(n-1)} = \frac{(-)(n-1)!(n-1 \pm \nu)!}{2^2 n!(n \pm \nu)!} a_{2(n-1)} \\ &= \left( \frac{(-)(n-1)!(n-1 \pm \nu)!}{2^2 n!(n \pm \nu)!} \right) \left( \frac{(-)(n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^2 (n-1)!(n-1 \pm \nu)!} \right) a_{2(n-2)} \\ &= \left( \frac{(-)^2 (n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 2} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-2)} \\ &= \left( \frac{(-)^2 (n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 2} n!(n \pm \nu)!} \right) \left( \frac{(-)(n-3)!(n-3 \pm \nu)!}{2(n-2)!(n-2 \pm \nu)!} \right) a_{2(n-3)} \\ &= \left( \frac{(-)^3 (n-3)!(n-3 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 3} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-3)} \\ &\vdots \\ &= \left( \frac{(-)^k (n-k)!(n-k \pm \nu)!}{2^{2 \cdot k} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-k)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

El máximo valor que puede tomar  $k$  en la expresión anterior es  $n$ , entonces

$$a_{2n} = \frac{(-)^n (\pm \nu)!}{2^{2n} n!(n \pm \nu)!} a_0, \quad (5.14)$$

tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm \nu} (\pm \nu)!}, \quad (5.15)$$

se tiene

$$a_{2n} = \frac{(-)^n}{2^{2n \pm \nu} n!(n \pm \nu)!}. \quad (5.16)$$

Sustituyendo este resultado en (5.3) se encuentra

$$R(z) = z^{\pm\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n \pm \nu} n! (n \pm \nu)!} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (n \pm \nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n \pm \nu}, \quad (5.17)$$

que son las llamadas funciones de Bessel. Se puede observar que ocupando la función  $\Gamma(z)$  las funciones de Bessel se pueden escribir como

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (5.18)$$

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}. \quad (5.19)$$

Observe que si  $\nu > 0$ , se cumple  $J_\nu(0) = 0$  y  $J_{-\nu}(0) = \infty$ .

Ahora, si  $\nu$  es un natural,  $\nu = m$ , entonces  $J_{-m}(z)$  está bien definida, sin embargo recordemos que si  $l$  es un natural  $1/\Gamma(-l) = 0$ . Por lo que, el término  $1/\Gamma(n-m+1)$  es nulo si  $n-m+1 < 0$ , entonces

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m} \\ &= \sum_{n \geq m} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n+m-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\ &= (-1)^m \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m} \\ &= (-1)^m J_m(z). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Es decir, si  $m$  es natural,  $J_{-m}(z)$  es solución de la ecuación de Bessel, pero no es linealmente independientes de  $J_m(z)$ .

Funciones de Neuman

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (5.21)$$

Funciones de Hankel

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = J_\nu(z) \pm iN_\nu(z). \quad (5.22)$$

## 5.2. Función generatriz

Existe una función de la cual se pueden extraer todas las funciones de Bessel de orden  $n$ . A esta función se le llama función generatriz y es:

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) t^n. \quad (5.23)$$

Para probar esta igualdad primero note que

$$\begin{aligned} e^{\frac{zt}{2}} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{zt}{2}\right)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k, \\ e^{\frac{-z}{2t}} &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \left(\frac{-z}{2t}\right)^j = \sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j t^{-j}}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^j, \end{aligned}$$

que implican

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} &= e^{\frac{zt}{2}} e^{\frac{-z}{2t}} = \left( \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k \right) \left( \sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j t^{-j}}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^j \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{t^{k-j} (-)^j}{k! j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+j}. \end{aligned}$$

Ahora, definamos  $n = k - j$ , por lo que  $k = n + j$  y  $k + j = 2j + n$ , con este cambio de variable se llega a

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \geq 0} \frac{t^n (-)^j}{j! (j+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j}{j! (j+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (5.23). En particular si  $t = e^{i\theta}$  se encuentra

$$\frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) = iz \sin \theta, \quad (5.24)$$

que implica

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (5.25)$$



Adicionalmente, como  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$  y  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ , se llega a

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (i)^n J_n(z) e^{in\theta}, \quad (5.26)$$

esta es la llamada propiedad de Jacobi-Anger.

Además, considerando que si  $m$  y  $n$  son enteros se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{in\theta} = 2\pi \delta_{nm} \quad (5.27)$$

y recurriendo a (5.25) se consigue

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - m\theta)} &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{iz \sin \theta} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) 2\pi \delta_{nm} \\ &= 2\pi J_m(z), \end{aligned}$$

entonces

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - n\theta)}. \quad (5.28)$$

También se puede ver que tomando en cuenta la paridad de  $\sin u$ ,  $\cos u$  y la fórmula de Euler se llega a

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - n\theta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (\cos(z \sin \theta - n\theta) + i \sin(z \sin \theta - n\theta)) \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (5.29)$$

es decir

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta). \quad (5.30)$$

Esta expresión de las funciones de Bessel fue la que originalmente encontro F. W. Bessel.

### 5.3. Relaciones de recurrencia

Ahora veremos que las funciones de Bessel satisfacen relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad (5.31)$$

$$\frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (5.32)$$

$$\left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^\nu J_\nu(z)) = z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z), \quad (5.33)$$

$$\left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^{-\nu} J_\nu(z)) = (-)^n z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}(z). \quad (5.34)$$

Para probar la primera identidad notemos que

$$z^\nu J_\nu(z) = z^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2(n+\nu)}}{2^{2n+\nu}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(z^\nu J_\nu(z))}{dz} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n 2(n+\nu)}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2(n+\nu)-1}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu-1)!} \frac{z^{2n+\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}} z^\nu \\ &= z^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu-1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2n+\nu-1} = z^\nu J_{\nu-1}(z), \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la identidad (5.31).

Ahora,

$$z^{-\nu} J_\nu(z) = z^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n}}{2^{2n+\nu}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(z^{-\nu} J_\nu(z))}{dz} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n 2n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^n 2n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n+\nu}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^{n+1} 2(n+1)}{(n+1)!(n+\nu+1)!} \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+\nu+2}} \\ &= (-) \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu+1)!} \frac{z^{2n+\nu+1}}{2^{2n+\nu+1}} z^{-\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-)z^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1} \\
&= (-)z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),
\end{aligned}$$

de donde se cumple la identidad (5.32).

Para probar las identidades (5.33) y (5.34) ocuparemos inducción. Primero haremos la prueba de (5.33). Para  $n = 0$  esta igualdad es correcta, por lo que la base inductiva está demostrada. Para el paso inductivo debemos suponer (5.33) y probar

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^\nu J_\nu(z)) = z^{\nu-(n+1)} J_{\nu-(n+1)}(z).$$

Note que ocupando la hipótesis inductiva y (5.31) se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^\nu J_\nu(z)) &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left( \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu J_\nu(z)) \right) \\
&= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z)) \\
&= \frac{1}{z} (z^{\nu-n} J_{\nu-n-1}(z)) = z^{\nu-(n+1)} J_{\nu-(n+1)}(z)
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Así, la igualdad (5.33) es correcta para cualquier  $n$ .

Ahora probaremos (5.34). Para  $n = 0$  esta igualdad es correcta, por lo que la base inductiva está demostrada. Para el paso inductivo debemos suponer (5.34) y probar

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = (-)^{n+1} z^{-(\nu+n+1)} J_{\nu+n+1}(z).$$

Ocupando la hipótesis inductiva y (5.32) se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^{-\nu} J_\nu(z)) &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left( \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^{-\nu} J_\nu(z)) \right) \\
&= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} ((-)^n z^{-\nu-n} J_{\nu+n}(z)) \\
&= (-)^n \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}(z)) \\
&= (-)^n (-) \frac{1}{z} (z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n+1}(z)) \\
&= (-)^{n+1} z^{-(\nu+n+1)} J_{\nu+n+1}(z)
\end{aligned}$$

esto es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto la igualdad (5.34) es válida para cualquier  $n$ .

Las identidades (5.31)-(5.34) también se pueden escribir como

$$J_{\nu-1}(z) = \frac{dJ_{\nu}(z)}{dz} + \frac{\nu}{z}J_{\nu}(z), \quad (5.35)$$

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{dJ_{\nu}(z)}{dz} - \frac{\nu}{z}J_{\nu}(z), \quad (5.36)$$

$$J_{\nu-n}(z) = z^{n-\nu} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^{\nu} J_{\nu}(z)), \quad (5.37)$$

$$J_{\nu+n}(z) = (-1)^n z^{\nu+n} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^{-\nu} J_{\nu}(z)). \quad (5.38)$$

Estas identidades son importantes para las aplicaciones.

## 5.4. Funciones de Bessel de orden $(n + \frac{1}{2})$

Las funciones de Bessel de orden  $(n + \frac{1}{2})$  son particularmente importantes para las aplicaciones. Por lo que vale la pena estudiar sus propiedades. Primero observemos que ocupando (5.18) y la serie de Taylor de la función  $\sin z$  se llega a

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (n + \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \left(\frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)! \sqrt{\pi}} z^{2n} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \end{aligned}$$

es decir

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z. \quad (5.39)$$

Además, considerando (5.18) y la serie de Taylor de la función  $\cos z$ , se consigue

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (n - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \left(\frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$= \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad (5.40)$$

por lo que

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \cos z. \quad (5.41)$$

Recurriendo a (5.39) y (5.38) se encuentra

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left( \frac{\sin z}{z} \right). \quad (5.42)$$

De forma analoga, apelando a (5.39) y (5.38) se llega a

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(z) = z^{(n+\frac{1}{2})} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left( \frac{\cos z}{z} \right). \quad (5.43)$$

Adicionalmente

$$\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi = 0, \quad \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi = (-)^n, \quad (5.44)$$

entonces

$$\begin{aligned} N_{(n+\frac{1}{2})}(z) &= \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(z) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi - J_{-(n+\frac{1}{2})}(z)}{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi} \\ &= (-)^{n+1} J_{-(n+\frac{1}{2})}(z), \end{aligned}$$

es decir

$$N_{(n+\frac{1}{2})}(z) = (-)^{n+1} z^{(n+\frac{1}{2})} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left( \frac{\cos z}{z} \right).$$

Las funciones de Hankel de orden  $(n + \frac{1}{2})$  tienen la forma

$$\begin{aligned} H_{(n+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z) &= J_{(n+\frac{1}{2})}(z) \pm i N_{(n+\frac{1}{2})}(z) \\ &= (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left( \frac{\sin z}{z} \right) \\ &\quad \pm i (-)^{n+1} z^{(n+\frac{1}{2})} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \left( \frac{\cos z}{z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z} \mp i \frac{\cos z}{z}\right) \\
&= (-)^n (\mp i) z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z \pm i \sin z}{z}\right) \\
&= (\mp i) (-)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$H_{(n+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z) = (\mp i) (-)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right).$$

Definiremos las funciones esféricas de Bessel como

$$\begin{aligned}
j_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} J_{(l+\frac{1}{2})}(z), \\
n_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} N_{(l+\frac{1}{2})}(z), \\
h_l^{(1,2)}(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{(l+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z),
\end{aligned}$$

de donde

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\sin z}{z}\right), \quad (5.45)$$

$$n_l(z) = -(-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\cos z}{z}\right),$$

$$h_l^{(1,2)}(z) = (\mp i) (-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right). \quad (5.46)$$

Estas funciones se usan en Mecánica cuántica y Electrodinámica.

## 5.5. Ortonormalidad

En el capítulo anterior vimos que las funciones de Bessel tienen un número numerable de ceros. Ocuparemos este resultado para probar que la integral del producto de dos funciones de Bessel satisfacen una propiedad que llamaremos de ortonormalidad.

La ecuación

$$\frac{d^2 R_\alpha(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR_\alpha(x)}{dx} + \left( \alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R_\alpha(x) = 0, \quad (5.47)$$

con el cambio de variable  $z = \alpha x$  se convierte en la ecuación de Bessel (5.1) que tiene las soluciones  $J_\nu(z)$ , por lo que  $R_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ . Además, la ecuación (5.47) se puede escribir como

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right) + \left( \alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R_\alpha(x) = 0, \quad (5.48)$$

es decir

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right) + \left( x\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\alpha(x) = 0. \quad (5.49)$$

De forma análoga, para una constante  $\beta$  se puede plantear la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dR_\beta(x)}{dx} \right) + \left( x\beta^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\beta(x) = 0, \quad (5.50)$$

cuya solución es  $R_\beta(x) = J_\nu(\beta x)$ .

Multiplicando  $R_\beta(x)$  por (5.49) se tiene

$$R_\beta(x) \frac{d}{dx} \left( x \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right) + \left( x\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\alpha(x) R_\beta(x) = 0, \quad (5.51)$$

que se puede escribir de la forma

$$\frac{d}{dx} \left( x R_\beta(x) \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right) - x \frac{dR_\beta(x)}{dx} \frac{dR_\alpha(x)}{dx} + \left( x\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\alpha(x) R_\beta(x) = 0 \quad (5.52)$$

De forma similar, multiplicando  $R_\alpha(x)$  por (5.50) se llega a

$$\frac{d}{dx} \left( x R_\alpha(x) \frac{dR_\beta(x)}{dx} \right) - x \frac{dR_\beta(x)}{dx} \frac{dR_\alpha(x)}{dx} + \left( x\beta^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\alpha(x) R_\beta(x) = 0 \quad (5.53)$$

Haciendo la resta de (5.52) con (5.53) se consigue

$$\frac{d}{dx} \left( x \left[ R_\alpha(x) \frac{dR_\beta(x)}{dx} - R_\beta(x) \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right] \right) + (\beta^2 - \alpha^2) x R_\alpha(x) R_\beta(x) = 0 \quad (5.54)$$

Por lo que,

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 dx x R_\alpha(x) R_\beta(x) = x \left[ R_\beta(x) \frac{dR_\alpha(x)}{dx} - R_\alpha(x) \frac{dR_\beta(x)}{dx} \right] \Big|_0^1,$$

si  $\nu > 0$ , se tiene

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 dx x R_\alpha(x) R_\beta(x) = \left[ R_\beta(1) \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \Big|_{x=1} - R_\alpha(1) \frac{dR_\beta(x)}{dx} \Big|_{x=1} \right],$$

es decir

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 dx x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) = \left( J_\nu(\beta) \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx} \Big|_{x=1} - J_\nu(\alpha) \frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx} \Big|_{x=1} \right).$$

Por lo tanto, si  $\lambda_n, \lambda_m$  son dos ceros de la función de Bessel  $J_\nu(x)$ , es decir si se cumple  $J_\nu(\lambda_n) = J_\nu(\lambda_m) = 0$ , se llega a

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = 0. \quad (5.55)$$

En particular si  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , se debe cumplir

$$\int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = 0, \quad (5.56)$$

de donde

$$\int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = \delta_{nm} a^2, \quad a = \text{constante}. \quad (5.57)$$

A esta propiedad se le llamada de ortogonalidad, se dice que las funciones de Bessel son ortogonales con peso  $x$ .

Para calcular la constante  $a$  multiplicaremos (5.47) por  $2x^2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx}$ , de donde

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \frac{d^2 R_\alpha(x)}{dx^2} + 2x \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) 2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx} R_\alpha(x) \\ &= x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + 2x \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 \\ &= \frac{d}{dx} \left( x^2 \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 \right) - \nu^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 + x^2 \alpha^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2, \end{aligned}$$



ocupando que

$$x^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 = \frac{d}{dx} (x^2 (R_\alpha(x))^2) - 2x (R_\alpha(x))^2,$$

se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) (R_\alpha(x))^2 \right) - 2\alpha^2 x (R_\alpha(x))^2 = 0. \quad (5.58)$$

Por lo tanto,

$$2\alpha^2 \int_0^1 dx x (R_\alpha(x))^2 = \left( x^2 \left( \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) (R_\alpha(x))^2 \right) \Big|_0^1. \quad (5.59)$$

En particular, como  $R_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$ , si  $\nu > 0$  y  $\alpha = \lambda_n$  con  $J_\nu(\lambda_n) = 0$ , se tiene

$$2\lambda_n^2 \int_0^1 dx x (J_\nu(\lambda_n x))^2 = \left( \frac{dJ_\nu(\lambda_n x)}{dx} \right)^2 \Big|_{x=1} = \lambda_n^2 \left( \frac{dJ_\nu(\lambda_n x)}{d(\lambda_n x)} \right)^2 \Big|_{x=1}, \quad (5.60)$$

considerando la identidad (5.36) se llega a

$$\int_0^1 dx x (J_\nu(\lambda_n x))^2 = \frac{1}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2. \quad (5.61)$$

Por lo que, si  $\nu > 0$  y  $\lambda_n, \lambda_m$  son raíces de la función de Bessel  $J_\nu(z)$  se cumple

$$\int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) J_\nu(\lambda_m z) = \frac{\delta_{nm}}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2. \quad (5.62)$$

Entonces, si tenemos una función  $f(z)$  definida en el intervalo  $(0, 1)$  se puede expresar en términos de la función de Bessel  $J_\nu(\lambda_n z)$ . En efecto, supongamos que

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m J_\nu(\lambda_m z), \quad (5.63)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) f(z) &= \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) \sum_{m \geq 0} a_m J_\nu(\lambda_m z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) J_\nu(\lambda_m z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \frac{\delta_{nm}}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2 = \frac{a_n}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2, \end{aligned} \quad (5.64)$$

por lo que

$$a_n = \frac{2}{(J_{\nu+1}(\lambda_n))^2} \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) f(z). \quad (5.65)$$

En la próxima sección veremos una aplicación de este resultado.

## 5.6. Ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

La ecuación de Helmholtz en dos dimensiones es

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(x, y) = 0, \quad \nabla_{2D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5.66)$$

Esta ecuación surge en diferentes contextos. Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger libre en dos dimensiones es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{2D}^2 \psi(x, y) = E \psi(x, y), \quad (5.67)$$

que se puede escribir como

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \psi(x, y) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (5.68)$$

Además, la ecuación de onda en dos dimensiones es

$$\left( \nabla_{2D}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, t) = 0. \quad (5.69)$$

Si proponemos soluciones de la forma  $\Psi(x, y, t) = e^{i\omega t} \psi(x, y)$ , se obtiene

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \psi(x, y) = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.70)$$

Estudiaremos la ecuación (5.66) en coordenadas polares, en estas coordenadas se obtiene

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} + k^2 \phi(r, \theta) = 0. \quad (5.71)$$

Supongamos que  $\psi(r, \theta)$  es de la forma  $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . De donde

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta) = \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 R(r)\Theta(\theta) = 0,$$

por lo que

$$\frac{r^2 (\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta)}{R(r)\Theta(\theta)} = \frac{r^2}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 r^2 = 0 \quad (5.72)$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r^2 (\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta)}{R(r)\Theta(\theta)} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

entonces se debe cumplir la ecuación

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -\nu^2, \quad \nu = \text{constante}, \quad (5.73)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -\nu^2 \Theta(\theta). \quad (5.74)$$

Cuya solución es

$$\Theta(\theta) = a_\nu e^{i\nu\theta} + b_\nu e^{-i\nu\theta}. \quad (5.75)$$

Ahora, sustituyendo (5.73) en (5.72) se encuentra

$$\frac{r^2}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \nu^2 + k^2 r^2 = 0, \quad (5.76)$$

que se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R(r) = 0. \quad (5.77)$$

Con el cambio de variable  $\zeta = kr$  se obtiene

$$\frac{\partial^2 R(\zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial R(\zeta)}{\partial \zeta} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2} \right) R(\zeta) = 0, \quad (5.78)$$

que es la ecuación de Bessel. Así,

$$R(r) = A_{\nu k} J_\nu(kr) + B_{\nu k} J_{-\nu}(kr). \quad (5.79)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones es de la forma

$$\psi(r, \theta) = (A_{\nu k} J_\nu(kr) + B_{\nu k} J_{-\nu}(kr)) (a_\nu e^{i\nu\theta} + b_\nu e^{-i\nu\theta}). \quad (5.80)$$

Los coeficientes  $A_{\nu k}, B_{\nu k}, a_{\nu}, b_{\nu}$  dependen de las condiciones del problema. Por ejemplo, si  $\psi(r, \theta)$  debe ser finito en el  $r = 0$ , se tiene que  $B_{\nu k}$ . En ese caso las soluciones toman la forma

$$\psi(r, \theta) = J_{\nu}(kr) (C_{\nu k} e^{i\nu\theta} + D_{\nu k} e^{-i\nu\theta}). \quad (5.81)$$

Para muchos problemas es importante que  $\psi(r, \theta)$  sea una función univaluada. Así, como  $(r, \theta)$  y  $(r, \theta + 2\pi)$  representan el mismo punto, se debe cumplir

$$\psi(r, \theta + 2\pi) = \psi(r, \theta). \quad (5.82)$$

De donde

$$\Theta(\theta + 2\pi) = A_{\nu} e^{i\nu(\theta+2\pi)} + B_{\nu} e^{-i\nu(\theta+2\pi)} = \Theta(\theta) = A_{\nu} e^{i\nu\theta} + B_{\nu} e^{-i\nu\theta}, \quad (5.83)$$

que induce

$$e^{i2\pi\nu} = 1. \quad (5.84)$$

Por lo tanto,  $\nu$  debe ser un número natural  $n$ . Por lo que, en este caso las soluciones son de la forma

$$\psi_{kn}(r, \theta) = J_n(kr) (C_{nk} e^{in\theta} + D_{nk} e^{-in\theta}). \quad (5.85)$$

Si el sistema está restringido a un disco de radio  $\tilde{R}$ , se deben poner la condición de borde

$$\psi(\tilde{R}, \theta) = 0, \quad (5.86)$$

que implica

$$J_n(k\tilde{R}) = 0. \quad (5.87)$$

Así,  $k\tilde{R}$  debe ser una raíz de Bessel,  $\lambda_{nm} = k\tilde{R}$ , es decir,

$$k = \frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}}. \quad (5.88)$$

Por lo que para este caso las soluciones son de la forma

$$\psi_{nm}(r, \theta) = J_n\left(\frac{\lambda_{nm}r}{\tilde{R}}\right) (C_{nm} e^{in\theta} + D_{nm} e^{-in\theta}). \quad (5.89)$$

La solución más general es

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}r}{\tilde{R}}\right) (C_{nm} e^{in\theta} + D_{nm} e^{-in\theta}). \quad (5.90)$$

Note que para la ecuación de onda (5.70) la restricción (5.88) implica que las únicas frecuencias permitidas son

$$\omega_{nm} = \frac{c\lambda_{nm}}{\tilde{R}}. \quad (5.91)$$

Mientras que para la ecuación de Schrodinger (5.68) la restricción (5.88) implica que las únicas energías permitidas son

$$E_{nm} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}} \right)^2. \quad (5.92)$$

## 5.7. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

Ahora estudiaremos las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = 0.$$

Para resolver esta ecuación proponemos  $\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ , de donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{\Phi(\varphi)Z(z)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + R(\rho)\Phi(\varphi) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} &= \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) = 0,$$

que implica

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2, \quad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2 Z(z), \quad (5.94)$$

la solución general a esta ecuación es

$$Z(z) = a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}. \quad (5.95)$$

Sustituyendo (5.94) en (5.93) se tiene

$$\frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} = \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 = 0,$$

así

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \rho^2 \frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (5.96)$$

que implica

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\nu^2, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\nu^2 \Phi(\varphi), \quad (5.97)$$

cuya solución general es

$$\Phi(\varphi) = A_\nu e^{i\nu\varphi} + B_\nu e^{-i\nu\varphi}. \quad (5.98)$$

Introduciendo (5.97) en (5.93) se llega a

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} + \alpha^2 = 0,$$

es decir,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left( \alpha^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Con el cambio de variable  $\zeta = \alpha\rho$  se tiene

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \frac{dR(\zeta)}{d\zeta} \right) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2} \right) R(\zeta) = 0, \quad (5.99)$$

que es la ecuación de Bessel. Así, se tiene

$$R(\rho) = C_\nu J_\nu(\alpha\rho) + D_\nu J_{-\nu}(\alpha\rho).$$

Por lo que las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas son de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, \nu} = (a_{\alpha} e^{\alpha z} + b_{\alpha} e^{-\alpha z}) (A_{\nu} e^{i\nu\varphi} + B_{\nu} e^{-i\nu\varphi}) (C_{\nu} J_{\nu}(\alpha\rho) + D_{\nu} J_{-\nu}(\alpha\rho)).$$

Las constantes  $a_{\alpha}, b_{\alpha}, A_{\nu}, B_{\nu}, C_{\nu}, D_{\nu}$  de determina según las condiciones de borde del problema.

Por ejemplo, si en  $\rho = 0$  el potencial debe ser finito, como  $J_{-\nu}$  diverge en cero, debe ocurrir que  $D_{\nu} = 0$ . En ese caso la solución es de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, \nu} = (a_{\alpha} e^{\alpha z} + b_{\alpha} e^{-\alpha z}) (A_{\nu} e^{i\nu\varphi} + B_{\nu} e^{-i\nu\varphi}) J_{\nu}(\alpha\rho).$$

Además, para muchos problemas es importante que  $\phi(\rho, \varphi, z)$  sea una función univaluada. Así, como  $(\rho, \varphi, z)$  y  $(\rho, \varphi + 2\pi, z)$  representan el mismo punto, se debe cumplir

$$\phi(\rho, \varphi + 2\pi, z) = \phi(\rho, \varphi, z). \quad (5.100)$$

De donde

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = A_{\nu} e^{i\nu(\varphi+2\pi)} + B_{\nu} e^{-i\nu(\varphi+2\pi)} = \Phi(\varphi) = A_{\nu} e^{i\nu\varphi} + B_{\nu} e^{-i\nu\varphi}, \quad (5.101)$$

que induce

$$e^{i2\pi\nu} = 1. \quad (5.102)$$

Por lo tanto,  $\nu$  debe ser un número natural  $n$ . Esto implica que  $R(\rho)$  deba de ser de la forma

$$R(\rho) = C_n J_n(\alpha\rho) + D_n J_{-n}(\alpha\rho). \quad (5.103)$$

Así, para este caso se tiene las soluciones

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, n} = (a_{\alpha} e^{\alpha z} + b_{\alpha} e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) (C_n J_n(\alpha\rho) + D_n J_{-n}(\alpha\rho)).$$

Por lo tanto, si el potencial es univaluado y además finito en el origen, debe ser una combinación lineal de potenciales de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, n} = (a_{\alpha} e^{\alpha z} + b_{\alpha} e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) J_n(\alpha\rho).$$

### 5.7.1. Ejemplo

Supongamos que tenemos un cilindro de radio  $\tilde{R}$  y altura  $h$ . La tapa inferior del cilindro y la superficie lateral tiene potencial cero, mientras que la tapa superior tiene potencial  $V(\rho, \varphi)$ . Calcular el potencial eléctrico en el interior del cilindro suponiendo que no hay cargas en esa región.

Por simplicidad, pondremos el eje del cilindro en el eje  $z$  y la tapa inferior la pondremos sobre el plano  $x - y$ . En este sistema las condiciones de borde son

$$\phi(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0, \quad \phi(\rho, \varphi, h) = V(\rho, \varphi). \quad (5.104)$$

Como no hay fuentes dentro del cilindro, potencial debe ser finito en el interior. Además como éste debe ser univaluado, el potencial debe ser de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, n} = (a_{\alpha} e^{\alpha z} + b_{\alpha} e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) J_n(\alpha \rho).$$

$$R(\rho) = C_n J_n(\alpha \rho). \quad (5.105)$$

Además, como se debe cumplir la condición de borde  $\phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0$ , se tiene que

$$R(\tilde{R}) = C_n J_n(\alpha \tilde{R}) = 0, \quad (5.106)$$

que implica

$$\alpha \tilde{R} = \lambda_{nm}, \quad \alpha = \frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}}. \quad (5.107)$$

Donde  $\lambda_{nm}$  la raíz  $m$ -ésima la función de Bessel de orden  $n$ . Así, la funciones  $R(\rho)$  son de la forma

$$R(\rho) = C_n J_n \left( \frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right). \quad (5.108)$$

Note que (5.107) implica que  $Z(z)$  tome la forma

$$Z(z) = a_{nm} e^{\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} + b_{nm} e^{-\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} \quad (5.109)$$

Mientras que la condición de borde  $\phi(\rho, \varphi, 0) = 0$  implica que

$$Z(0) = (a_{nm} + b_{nm}) = 0, \quad (5.110)$$



que a su vez implica

$$Z(z) = a_{nm} \left( e^{\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} - e^{-\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} \right) = A_{nm} \sinh \left( \frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}} \right). \quad (5.111)$$

Así, la solución más general de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de borde  $\phi(\rho, \varphi, 0) = \phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0$ , es

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}} \right) J_n \left( \frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) (A_{nm} \cos n\phi + B_{nm} \sin n\phi).$$

Para determinar los coeficientes  $A_{nm}, B_{nm}$  debemos imponer la condición de borde faltante:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi, h) &= V(\rho, \varphi) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{nm} h}{\tilde{R}} \right) J_n \left( \frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) (A_{nm} \cos n\phi + B_{nm} \sin n\phi). \end{aligned}$$

Ahora, considerando (5.62) y que si  $k$  y  $l$  son naturales se cumplen las integrales

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos k\varphi \cos l\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin k\varphi \sin l\varphi = \pi \delta_{kl}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \cos k\varphi \sin l\varphi = 0$$

se encuentra

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) \sin k\varphi J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) V(\rho, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{nm} h}{\tilde{R}} \right) B_{nm} \\ & \times \int_0^{2\pi} d\varphi \sin k\varphi \sin n\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) J_n \left( \frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) \\ & = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{nm} h}{\tilde{R}} \right) B_{nm} \pi \delta_{kn} \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) J_n \left( \frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) \\ & = \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{km} h}{\tilde{R}} \right) B_{km} \pi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) J_k \left( \frac{\lambda_{km} \rho}{\tilde{R}} \right) \\ & = \sum_{m \geq 0} \sinh \left( \frac{\lambda_{km} h}{\tilde{R}} \right) B_{km} \pi \delta_{lm} \frac{1}{2} (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2 = \sinh \left( \frac{\lambda_{kl} h}{\tilde{R}} \right) B_{kl} \pi (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2, \end{aligned}$$

entonces

$$B_{kl} = \frac{2}{\pi \sinh \left( \frac{\lambda_{kl} h}{\tilde{R}} \right) (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) \sin k\varphi J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) V(\rho, \varphi).$$

De la misma forma se obtiene

$$A_{kl} = \frac{2}{\pi \sinh \left( \frac{\lambda_{kl} h}{\tilde{R}} \right) (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) \cos k\varphi J_k \left( \frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) V(\rho, \varphi).$$

## 5.8. Ecuaciones tipo Bessel

Existen varias ecuaciones que se pueden reducir a la ecuación de Bessel. Por ejemplo, si  $R(z)$  es solución de la ecuación de Bessel, entonces la función

$$u(z) = z^{-c} R(az^b)$$

es una solución de la ecuación

$$z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + (2c+1)z \frac{du(z)}{dz} + (a^2 b^2 z^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)) u(z) = 0. \quad (5.112)$$

Para probar esta afirmación tomaremos el cambio de variable  $w = az^b$ , de donde

$$z = \left(\frac{w}{a}\right)^{\frac{1}{b}}, \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \frac{z}{bw} = \frac{z^{1-b}}{ba}, \\ R(w) &= z^c u(z). \end{aligned} \quad (5.114)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} (w^2 - \nu^2) R(w) &= (a^2 z^{2b} - \nu^2) z^c u(z) = \frac{z^c}{b^2} (a^2 b^2 z^{2b} - \nu^2 b^2) u(z), \\ \frac{dR(w)}{dw} &= \frac{d}{dw} (z^c u(z)) = \frac{dz}{dw} \frac{d}{dz} (z^c u(z)) \\ &= \left(\frac{z^{1-b}}{ab}\right) \left(cz^{c-1} u(z) + z^c \frac{du(z)}{dz}\right) \\ &= \frac{1}{ab} \left(cz^{c-b} u(z) + z^{c-b+1} \frac{du(z)}{dz}\right) \\ w \frac{dR(w)}{dw} &= \frac{z^c}{b} \left(cu(z) + z \frac{du(z)}{dz}\right) = \frac{z^c}{b^2} \left(cbu(z) + zb \frac{du(z)}{dz}\right) \\ \frac{d^2 R(w)}{dw^2} &= \frac{dz}{dw} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{ab} \left(cz^{c-b} u(z) + z^{c-b+1} \frac{du(z)}{dz}\right)\right) \\ &= \frac{1}{ab} \left(c(c-b)z^{c-b-1} u(z) + (2c-b+1)z^{c-b} \frac{du(z)}{dz} \right. \\ &\quad \left. + z^{c-b+1} \frac{d^2 u(z)}{dz^2}\right) \\ w^2 \frac{d^2 R(w)}{dw^2} &= \frac{z^c}{b^2} \left(c(c-b)u(z) + (2c+1-b)z \frac{du(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2}\right). \end{aligned}$$

Entonces, como  $R(w)$  satisface la ecuación de Bessel, se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= w^2 \frac{d^2 R(w)}{dw^2} + w \frac{dR(w)}{dw} + (w^2 - \nu^2) R(w) \\
&= \frac{z^c}{b^2} \left( c(c-b)u(z) + (2c+1-b)z \frac{du(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right) \\
&+ \frac{z^c}{b^2} \left( cbu(z) + zb \frac{du(z)}{dz} \right) + \frac{z^c}{b^2} (a^2 b^2 z^{2b} - \nu^2 b^2) u(z) \\
&= \frac{z^c}{b^2} \left( z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + (2c+1)z \frac{du(z)}{dz} + (a^2 b^2 z^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)) u(z) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Lo que implica que la función  $u(z)$  es solución de (5.112). Este resultado tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, consideremos la ecuación de Airy

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + zu(z) = 0. \quad (5.115)$$

Note que si

$$c = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{2}{3}, \quad \nu = \pm \frac{1}{3} \quad (5.116)$$

la ecuación (5.112) se convierte en (5.115). Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Airy es

$$u(z) = |z|^{\frac{1}{2}} \left( A J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2|z|^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + B J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2|z|^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right), \quad (5.117)$$

con  $A$  y  $B$  constantes.

### 5.8.1. Partícula cuántica en una fuerza constante

La ecuación de Schrodinger para una partícula en una fuerza constante,  $F$ , es

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - Fx \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (5.118)$$

Con el cambio de variable

$$z = \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( x + \frac{E}{F} \right) \quad (5.119)$$

se obtiene

$$x = z \left( \frac{\hbar^2}{2mF} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{E}{F}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.120)$$

por lo que (5.118) toma la forma

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \right) \psi(z) = 0, \quad (5.121)$$

que es la ecuación de Airy. Entonces, considerando (5.117), se tiene que

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left| x + \frac{E}{F} \right|^{\frac{1}{2}} \left[ A J_{\frac{1}{3}} \left( \left| \frac{8mF}{9\hbar^2} \right|^{\frac{1}{2}} \left| x + \frac{E}{F} \right|^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ & \left. + B J_{-\frac{1}{3}} \left( \left| \frac{8mF}{9\hbar^2} \right|^{\frac{1}{2}} \left| x + \frac{E}{F} \right|^{\frac{3}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.122)$$

es la función de onda del sistema.

## 5.9. Integrales

Se cumplen las integrales

$$\int_0^\infty d\lambda e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (5.123)$$

$$\int_0^\infty d\lambda e^{-z\lambda} J_1(\rho\lambda) = \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (5.124)$$

$$\int_0^\infty dz J_\nu(\rho z) e^{-tz^2} z^{\nu+1} = \frac{1}{2t} \left( \frac{\rho}{t} \right)^\nu e^{-\frac{\rho^2}{2t}}, \quad (5.125)$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + k^2}}}{\sqrt{\rho^2 + k^2}} \quad (5.126)$$

## 5.10. Ecuación de Bessel modificada

También tenemos la ecuación de Bessel modificada

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (5.127)$$

# Capítulo 6

## Elementos de Álgebra Lineal

En este capítulo veremos algunas herramientas del álgebra lineal que son de utilidad para resolver ecuaciones diferenciales.

### 6.1. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial se define con un conjunto  $\mathbf{V}$ , un campo  $\mathbf{K}$  y dos operaciones

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad (6.1)$$

$$\mu : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}. \quad (6.2)$$

Estas operaciones deben cumplir que si  $u, v$  pertenecen a  $\mathbf{V}$ , entonces  $u + v$  pertenece a  $\mathbf{V}$  y si  $\alpha$  pertenece a  $\mathbf{K}$ , entonces  $\mu(\alpha, v) = \alpha v$  pertenece a  $\mathbf{V}$ . Además, se debe cumplir

$$1) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}, \quad u + v = v + u, \quad (6.3)$$

$$2) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{V}, \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad (6.4)$$

$$3) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (6.5)$$

$$4) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \quad (6.6)$$

$$5) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \quad (6.7)$$

$$6) \quad \exists 0 \in \mathbf{V} \text{ tal que } \forall v \in \mathbf{V}, \quad 0 + v = v, \quad (6.8)$$

$$7) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad \exists -v \in \mathbf{V}, \text{ tal que } v + (-v) = 0, \quad (6.9)$$

$$8) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad ev = v, \quad (6.10)$$

aquí  $e$  representa el neutro multiplicativo de  $\mathbf{K}$ .

## 6.2. Ejemplos

Ahora, veremos algunos ejemplos de espacios vectoriales. El lector puede verificar que los siguientes espacios cumplen las reglas de espacios vectoriales.

### 6.2.1. $\mathbf{C}^n$

Un ejemplo de espacio vectorial son los arreglos de la forma

$$\mathbf{C}^n = \{(c_1, c_2, \dots, c_n), c_i \in \mathbf{C}\} \quad (6.11)$$

Si se tienen dos vectores de  $\mathbf{C}^n$ ,

$$(c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (6.12)$$

la suma se define como

$$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n). \quad (6.13)$$

Mientras que si  $\lambda$  es un número complejo, el producto por un escalar define como

$$\lambda(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n). \quad (6.14)$$

### 6.2.2. Sucesiones

Una generalización de  $\mathbf{C}^n$  es tomar el límite  $n \rightarrow \infty$ , que nos da el espacio de sucesiones

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n \in \mathbf{C}. \quad (6.15)$$

Para este caso debemos pedir que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty. \quad (6.16)$$

Así, si se tienen dos sucesiones

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \quad a_n, b_n \in \mathbf{C} \quad (6.17)$$

la suma se define como

$$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6.18)$$

Mientras que si  $\lambda$  es un número complejo, el producto por un escalar se define como

$$\lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6.19)$$

### 6.2.3. Matrices

Otra generalización de  $\mathbf{C}^n$  es el espacio de matrices  $M_{(nm)}$  de entradas complejas. Definir sumas y producto por escalar

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix}, \quad M_{ij} \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Si se tienen dos matrices

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1m} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1} & N_{n2} & \cdots & N_{nm} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

La suma se define como

$$M + N = \begin{pmatrix} M_{11} + N_{11} & M_{12} + N_{12} & \cdots & M_{1m} + N_{1m} \\ M_{21} + N_{21} & M_{22} + N_{22} & \cdots & M_{2m} + N_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} + N_{n1} & M_{n2} + N_{n2} & \cdots & M_{nm} + N_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Mientras que el producto por un escalar,  $\lambda \in \mathbf{C}$ , se define como

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda M_{11} & \lambda M_{12} & \cdots & \lambda M_{1m} \\ \lambda M_{21} & \lambda M_{22} & \cdots & \lambda M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda M_{n1} & \lambda M_{n2} & \cdots & \lambda M_{nm} \end{pmatrix}.$$

### 6.2.4. Funciones

Otro ejemplo de espacio vectorial son Funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ . Supongamos que tenemos dos funciones

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.22)$$

la suma se define como

$$f + g : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.23)$$

con la regla de correspondencia

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in [a, b]. \quad (6.24)$$

Mientras que el producto por un escalar,  $\lambda \in \mathbf{C}$ , se define como

$$\lambda f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.25)$$

con la regla de correspondencia

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (6.26)$$

### 6.3. Producto Escalar

Una operación importante entre vectores es el producto escalar, que manda dos vectores a un número complejo

$$\langle | \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.27)$$

que satisface los axiomas:

$$\cdot) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad \langle v|v \rangle \geq 0, \quad \langle v|v \rangle = 0 \iff v = 0, \quad (6.28)$$

$$\cdot\cdot) \quad \forall v, u, w \in \mathbf{V} \quad \langle v + u|w \rangle = \langle v|w \rangle + \langle u|w \rangle, \quad (6.29)$$

$$\cdot\cdot\cdot) \quad \forall v, u \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbf{C} \quad \langle v|\lambda u \rangle = \lambda \langle v|u \rangle, \quad (6.30)$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot) \quad \forall v, u \in \mathbf{V}, \quad \langle v|u \rangle = (\langle u|v \rangle)^*. \quad (6.31)$$

Existen diferentes implicaciones de estos axiomas. Por ejemplo, para cualquier vector  $v$  se cumple  $\langle v|0 \rangle = 0$ . En efecto sabemos que  $v - v = 0$ , entonces

$$\langle v|0 \rangle = \langle v|v - v \rangle = \langle v|v \rangle - \langle v|v \rangle = 0. \quad (6.32)$$

Otra propiedad es que si  $\lambda$  es un número complejo y  $v_1, v_2$  dos vectores, entonces se cumple

$$\langle \lambda v_1|v_2 \rangle = \lambda^* \langle v_1|v_2 \rangle. \quad (6.33)$$

Esta igualdad es correcta pues considerando (6.30) y (6.31) se encuentra

$$\begin{aligned} \langle \lambda v_1|v_2 \rangle &= (\langle v_2|\lambda v_1 \rangle)^* = (\lambda \langle v_2|v_1 \rangle)^* = \lambda^* (\langle v_2|v_1 \rangle)^* \\ &= \lambda^* \langle v_1|v_2 \rangle. \end{aligned}$$



Además, si  $v$  y  $w$  son dos vectores, entonces

$$\begin{aligned}
& \langle v + w | v + w \rangle + \langle v - w | v - w \rangle = \langle v + w | v + w \rangle \\
& + \langle v - w | v - w \rangle \\
& = \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle + \langle v | v - w \rangle - \langle w | v - w \rangle, \\
& = \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle + \langle v | v \rangle - \langle v | w \rangle \\
& - \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\
& = 2 (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle),
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle v + w | v + w \rangle + \langle v - w | v - w \rangle = 2 (\langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle), \quad (6.34)$$

que es la llamada igualdad del paralelogramo.

Antes de ver otras propiedades del producto escalar veremos algunos ejemplos de ellos.

## 6.4. Ejemplos de producto escalar

### 6.4.1. Vectores en $\mathbf{C}^n$

Si tenemos dos vectores en  $\mathbf{C}^n$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , el producto escalar se define como

$$\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i. \quad (6.35)$$

Note que a los vectores  $v$  y  $w$  se les puede asignar las matrices columna

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad (6.36)$$

por lo que

$$\langle v | w \rangle = v^{*T} w = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & \cdots & v_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

### 6.4.2. Sucesiones

Si tenemos dos sucesiones  $s_1 = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $s_2 = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  donde  $a_n, b_n \in \mathbf{C}$  y  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$ ,  $\sum_{n \geq 0} |b_n|^2 < \infty$ , se puede definir el producto escalar como

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \sum_{n \geq 0} a_n^* b_n, \quad (6.38)$$

note que éste es una generalización del producto escalar entre vectores.

### 6.4.3. Matrices

En el espacio vectorial de las matrices de entradas complejas de  $n \times n$  también es posible definir un producto escalar. Antes de definir este producto recordemos que si  $M$  es una matriz de entradas  $M_{ij}$ , la traza se define como  $Tr(M) = \sum_{i=1}^n M_{ii}$ . También recordemos que las entradas de la matriz transpuesta  $M^T$  se definen como  $(M^T)_{ij} = M_{ji}$ , además si  $N$  es otra matriz de  $n \times n$  las entradas de la matriz producto  $MN$  son  $(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n M_{ik} N_{kj}$ . De estas definiciones es claro que

$$\begin{aligned} Tr(M^T) &= Tr(M), & Tr(M+N) &= Tr(M) + Tr(N), \\ Tr(NM) &= Tr(MN), & (MN)^T &= N^T M^T, \end{aligned}$$

en efecto

$$\begin{aligned} Tr(M^T) &= \sum_{i=1}^n (M^T)_{ii} = \sum_{i=1}^n M_{ii} = Tr(M), \\ Tr(M+N) &= \sum_{i=1}^n (M+N)_{ii} = \sum_{i=1}^n (M_{ii} + N_{ii}) = \sum_{i=1}^n M_{ii} + \sum_{i=1}^n N_{ii} \\ &= Tr(M) + Tr(N), \\ Tr(MN) &= \sum_{a=1}^n (MN)_{aa} = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n M_{ab} N_{ba} = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n N_{ba} M_{ab} \\ &= \sum_{b=1}^n \left( \sum_{a=1}^n N_{ba} M_{ab} \right) = \sum_{b=1}^n (NM)_{bb} = Tr(NM), \\ ((MN)^T)_{ij} &= (MN)_{ji} = \sum_{k=1}^n M_{jk} N_{ki} = \sum_{k=1}^n N_{ki} M_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (N^T)_{ik} (M^T)_{kj} = (N^T M^T)_{ij}. \end{aligned}$$

Definiremos el producto escalar entre matrices como

$$\langle M|N \rangle = \text{Tr} (M^{*T} N) . \quad (6.39)$$

El primer axioma se cumple, pues

$$\begin{aligned} \langle M|M \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} M) = \sum_{i=1}^n (M^{*T} M)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M^{*T})_{ik} M_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ki}^* M_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |M_{ik}|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

De donde, si  $\langle M|M \rangle = 0$ , entonces  $M_{ik} = 0$ , es decir  $M = 0$ .

Además, si  $N_1$  y  $N_2$  son matrices de  $n \times n$ ,

$$\begin{aligned} \langle M|N_1 + N_2 \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} (N_1 + N_2)) = \text{Tr} (M^{*T} N_1 + M^{*T} N_2) \\ &= \text{Tr} (M^{*T} N_1) + \text{Tr} (M^{*T} N_2) \\ &= \langle M|N_1 \rangle + \langle M|N_2 \rangle . \end{aligned}$$

Por lo que se cumple el segundo axioma de producto escalar.

También se puede observar que si  $\lambda$  es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} \langle M|N \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} \lambda N) = \sum_{i=1}^n (M^{*T} \lambda N)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n (M^{*T} N)_{ii} \\ &= \lambda \text{Tr} (M^{*T} N) = \lambda \langle M|N \rangle . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Adicionalmente, se encuentra

$$\begin{aligned} \langle M|N \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} N) = \text{Tr} \left( (M^{*T} N)^T \right) = \text{Tr} (N^T M^*) \\ &= ([\text{Tr} (N^T M^*)]^*)^* = (\text{Tr} (N^{*T} M))^* = (\langle N|M \rangle)^* . \end{aligned}$$

Por lo tanto, (6.39) es un producto escalar para el espacio vectorial de las matrices de  $n \times n$ .

#### 6.4.4. Funciones

Si  $q(x)$  es una función real, continua y positiva en el intervalo  $(a, b)$ , para el espacio vectorial de las funciones continuas,  $\{f\}$ , que va del intervalo  $[a, b]$  a los complejos, tales que

$$\int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) < \infty, \quad (6.42)$$

se puede definir el producto escalar como

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x). \quad (6.43)$$

Considerando las propiedades del  $q(x)$  y  $f(x)$ , el primer axioma de producto escalar se cumple pues

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) = \int_a^b dx q(x) |f(x)|^2 \geq 0, \\ \langle f|f \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) = \int_a^b dx q(x) |f(x)|^2 = 0 \iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

El segundo axioma de producto escalar se cumple pues

$$\begin{aligned} \langle f|g_1 + g_2 \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) (g_1(x) + g_2(x)) \\ &= \int_a^b dx q(x) (f(x)^* g_1(x) + f(x)^* g_2(x)) \\ &= \int_a^b dx q(x) f(x)^* g_1(x) + \int_a^b dx q(x) f(x)^* g_2(x) \\ &= \langle f|g_1 \rangle + \langle f|g_2 \rangle. \end{aligned}$$

Los axiomas restantes también se cumplen, para probar esta afirmación supongamos que  $\lambda$  es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} \langle f|\lambda g \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) \lambda g(x) = \lambda \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x) = \lambda \langle f|g \rangle, \\ \langle f|g \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x) = \left( \int_a^b dx (q(x) f^*(x) g(x))^* \right)^* \\ &= \left( \int_a^b dx q(x) g^*(x) f(x) \right)^* = (\langle g|f \rangle)^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (6.43) es un producto escalar para el espacio vectorial de las funciones.

## 6.5. Ortonormalidad e Independencia Lineal

Se dice que un conjunto de vectores  $\{v_i\}_{i=1}^n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si cualquier combinación lineal de la forma

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad (6.44)$$

implica  $a_i = 0$ . Se dice que un conjunto de vectores es ortonormal si

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.45)$$

Si un conjunto de vectores es ortonormal, entonces es linealmente independiente. En efecto, supongamos que  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  son un conjunto de escalares tales que se cumple (6.44), entonces como los vectores son ortonormales,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_j | 0 \rangle = \left\langle v_j \left| \sum_{i=1}^n a_i v_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_j | a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle v_j | v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba.

Un conjunto de vectores ortonormal,  $\{v_i\}_{i=1}^n$ , tiene varias propiedades interesantes. Por ejemplo, si  $v$  es una combinación lineal estos vectores, entonces

$$\begin{aligned} \langle v | v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i \left| \sum_{j=1}^n a_j v_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i v_i | a_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j \langle v_i | v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Lo que quiere decir que si  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ , entonces

$$\langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (6.47)$$

### 6.5.1. Teorema de Pitágoras

Supongamos que  $v$  es un vector y  $\{v_i\}_{i=1}^n$  es un conjunto de vectores ortonormales, entonces el vector

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i$$

es ortonormal a

$$w_2 = v - \sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\langle w_1 | w_2 \rangle &= \left\langle \left( \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left( v - \sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left( \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| v \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \left( \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left( \sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | (\langle v_i | v \rangle) | v \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle (\langle v_i | v \rangle v_i) | (\langle v_j | v \rangle v_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_j | v \rangle \langle v_i | v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_j | v \rangle \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Además, ocupando que  $\{v_i\}_{i=1}^n$  es un conjunto de vectores ortonormales se cumple

$$\langle w_1 | w_1 \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2. \quad (6.48)$$

Adicionalmente se puede notar que

$$v = w_1 + w_2, \quad (6.49)$$

considerando que  $w_1$  y  $w_2$  son vectores ortonormales, se puede probar que

$$\langle v | v \rangle = \langle w_1 | w_1 \rangle + \langle w_2 | w_2 \rangle. \quad (6.50)$$

Tomando en cuenta los resultados anteriores, claramente se cumple que si  $\{v_n\}$  es un conjunto de vectores ortonormales, para cualquier vector  $v$  se tiene que

$$\langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2$$

$$+ \left\langle \left( v - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left( v - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \right\rangle. \quad (6.51)$$

### 6.5.2. Desigualdad de Bessel

Note que el teorema de Pitágoras implica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 \leq \langle v | v \rangle \quad (6.52)$$

que es la llamada desigualdad de Bessel.

### 6.5.3. Desigualdad de Schwarz

Sea  $w$  un vector diferente de cero, claramente el conjunto formado por  $\{\frac{w}{\sqrt{\langle w | w \rangle}}\}$  es ortonormal. Entonces, de acuerdo a la desigualdad de Bessel (6.63), para cualquier vector  $v$  se cumple

$$\left| \left\langle \frac{w}{\sqrt{\langle w | w \rangle}} \middle| v \right\rangle \right|^2 \leq \langle v | v \rangle, \quad \implies \quad |\langle w | v \rangle|^2 \leq \langle w | w \rangle \langle v | v \rangle \quad (6.53)$$

que implica

$$|\langle w | v \rangle| \leq \sqrt{\langle w | w \rangle} \sqrt{\langle v | v \rangle}. \quad (6.54)$$

Esta es la llamada desigualdad de Schwarz.

### 6.5.4. Desigualdad del triángulo

Sean  $v$  y  $w$  dos vectores, entonces

$$\begin{aligned} \langle v + w | v + w \rangle &= \langle v + w | v \rangle + \langle v + w | w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle w | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | v \rangle^* \\ &= \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle w | v \rangle) \\ &\leq \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2|\langle w | v \rangle|, \end{aligned} \quad (6.55)$$

entonces, ocupando desigualdad de Schwarz (6.64) se tiene

$$\begin{aligned} \langle v + w | v + w \rangle &\leq \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2\sqrt{\langle w | w \rangle} \sqrt{\langle v | v \rangle} \\ &= \left( \sqrt{\langle w | w \rangle} + \sqrt{\langle v | v \rangle} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.56)$$

es decir

$$\langle v + w | v + w \rangle \leq \left( \sqrt{\langle w | w \rangle} + \sqrt{\langle v | v \rangle} \right)^2 \quad (6.57)$$

esta es la llamada desigualdad del triángulo.

## 6.6. Espacios Normados

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\| \cdot \|$  un función de  $V$  en los reales. Se dice que  $(V, \| \cdot \|)$  es un espacio normado si

$$\begin{aligned} I) \quad & \|v\| \geq 0, \\ II) \quad & \|v\| = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad v = 0, \\ III) \quad & \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \\ IV) \quad & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Note que si  $V$  es un espacio vectorial con producto escalar, entonces se puede definir un espacio normado con la norma dada por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}. \quad (6.59)$$

En efecto, La propiedades  $I)$  y  $II)$  se cumplen, pues por los axiomas de producto escalar se tiene que  $\langle v | v \rangle \geq 0$  y  $\langle v | v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ . La propiedad  $III)$  se cumple pues, si  $\alpha$  es un escalar, se tiene

$$\begin{aligned} \|\alpha v\| &= \sqrt{\langle \alpha v | \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^* \alpha \langle v | v \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle v | v \rangle} \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle v | v \rangle} = |\alpha| \|v\|. \end{aligned} \quad (6.60)$$

La propiedad ....) también se cumple pues, ocupando la desigualdad del triángulo se encuentra

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w | v + w \rangle \leq \left( \sqrt{\langle w | w \rangle} + \sqrt{\langle v | v \rangle} \right)^2 = (\|w\| + \|v\|)^2,$$

es decir

$$\|v + w\| \leq \|w\| + \|v\|.$$

Por lo tanto, un espacio vectorial con producto escalar es un espacio normado con la norma dada por  $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ .



Note que ocupando la notación de espacios normados la igualdad del paralelogramos toma la forma

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2 (||v||^2 + ||w||^2). \quad (6.61)$$

Mientras que, si  $\{v_i\}_{i=1}^n$  es un conjunto de vectores ortonormales, el teorema de Pitágoras se puede escribir como

$$||v||^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 + \left\| v - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right\|^2. \quad (6.62)$$

Mientras que la desigualdad de Bessel toma la forma

$$\sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 \leq ||v||^2, \quad (6.63)$$

y la desigualdad de Schwarz es

$$|\langle w | v \rangle| \leq ||w|| \quad ||v||. \quad (6.64)$$

### 6.6.1. Espacios métricos

Sea un conjunto  $M$  y  $d$  una función de  $M \times M$  en los reales. Se dice que  $(M, d)$  es un espacio métrico si satisface que  $\forall x, y \in M$  se cumple

$$\begin{aligned} A) \quad & d(x, y) \geq 0, \\ B) \quad & d(x, y) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x = y, \\ C) \quad & d(x, y) = d(y, x), \\ D) \quad & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned} \quad (6.65)$$

A la función  $d$  se le llama distancia.

Si se  $V$  es un espacio normado, entonces se tiene un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(v_1, v_2) = ||v_1 - v_2||. \quad (6.66)$$

Los dos primeros axiomas de distancia se cumplen, pues  $d(v_1, v_2) = ||v_1 - v_2|| \geq 0$  y  $d(v_1, v_2) = ||v_1 - v_2|| = 0$  si y sólo si  $v_1 - v_2 = 0$ , es decir  $v_1 = v_2$ . También se cumple,

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= ||v_1 - v_2|| = ||(-)(v_2 - v_1)|| = |(-)| \quad ||v_2 - v_1|| = ||v_2 - v_1|| \\ &= d(v_2, v_1), \end{aligned}$$

por lo tanto, se cumple el axioma  $C$ ). Además, por la desigualdad del triángulo, se tiene

$$\begin{aligned} d(v_1, v_3) &= \|v_1 - v_3\| = \|(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3)\| \leq \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - v_3\| \\ &= d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3), \end{aligned}$$

de donde se cumple el axioma  $D$ ).

Así, un espacio normado es métrico. Por lo tanto, cualquier espacio con producto escalar es normado y por lo tanto métrico.

## 6.7. Ejemplos de bases ortonormales

En esta sección veremos diferentes conjuntos de funciones que forman una base ortonormal.

### 6.7.1. Exponencial compleja

Sea el conjunto de funciones

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.67)$$

definidas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , aquí  $n$  es un número entero. Este conjunto de funciones es ortonormal. En efecto

$$\langle \Phi_n(\varphi) | \Phi_m(\varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi (\Phi_n(\varphi))^* \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n)\varphi}. \quad (6.68)$$

Si  $m = n$  es claro que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-n)\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 1. \quad (6.69)$$

Si  $n \neq m$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n)\varphi} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-m)} e^{i(m-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(m-n)} ((-1)^{2(m-n)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle \Phi_n(\varphi) | \Phi_m(\varphi) \rangle = \delta_{mn}, \quad (6.70)$$

es decir, el conjunto (6.67) es ortonormal y entonces linealmente independiente.

### 6.7.2. Ecuaciones tipo Sturm-Liouville

Anteriormente vimos que si  $(\psi_{\lambda_1}(x), \lambda_1), (\psi_{\lambda_2}(x), \lambda_2)$  son soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + (\lambda q(x) + r(x)) \psi(x) = 0 \quad (6.71)$$

que satisfacen la condiciones de Dirichlet

$$\psi(a) = \psi(b) = 0 \quad (6.72)$$

ó las de Neumann

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0 \quad (6.73)$$

ó bien que  $p(x)$  cumpla

$$p(a) = p(b) = 0, \quad (6.74)$$

se encuentra que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0.$$

En particular note que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  se tiene

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (6.75)$$

Además, se puede ver que la integral

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = \alpha_{\lambda}, \quad (6.76)$$

es positiva, es decir  $\alpha_{\lambda} > 0$ . Por lo que, si  $\alpha_{\lambda} < \infty$ , el conjunto de funciones

$$\frac{\tilde{\psi}_{\lambda}(x)}{\sqrt{\alpha_{\lambda}}} \quad (6.77)$$

cumplen

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \tilde{\psi}_{\lambda_2}(x) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (6.78)$$

Se dice que las soluciones de (6.71) que satisfacen alguna de las condiciones (6.72)-(6.74) son un conjunto de funciones ortonormales con función de peso  $q(x)$ .

### 6.7.3. Ecuación de Schrodinger en una dimension

Supongamos que  $V(x)$  es una función real, la ecuación de Schrodinger en el intervalo  $[a, b]$  es

$$H\psi(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (6.79)$$

donde  $E$  es una constante real a determinar y se deben satisfacer las condiciones de borde  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ . Claramente este es un problema tipo Sturm-Liouville con condiciones de Dirichlet. Por lo que si  $\psi_E(x)$  es solución con la constante  $E$  y  $\psi_{E'}(x)$  es solución con la constante  $E'$ , entonces

$$\langle \psi_E(x) | \psi_{E'}(x) \rangle = \int_a^b dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta_{EE'}. \quad (6.80)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Schrodinger en una dimensión forman un conjunto de funciones ortonormales.

### 6.7.4. Ecuación de Schrodinger en tres dimensiones

Para la ecuación de Schrodinger en tres dimensiones se tiene el mismo resultado. Veamos este caso, si  $U(x, y, z)$  es una función real, la ecuación de Schrodinger es

$$H\psi(x, y, z) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z). \quad (6.81)$$

Supondremos que esta ecuación está definida en una región de volumen  $V$  cuya frontera es  $\Sigma$ , por lo que la condición de Dirichlet es  $\psi(x, y, z)|_{\Sigma} = 0$ .

Si  $\psi_E(x, y, z)$  es solución con la constante  $E$  y  $\psi_{E'}(x, y, z)$  es solución con la constante  $E'$ , entonces

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_E(x, y, z) = E\psi_E(x, y, z), \quad (6.82)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_{E'}(x, y, z) = E'\psi_{E'}(x, y, z). \quad (6.83)$$

Sacando el complejo conjugado a la segunda ecuación se llega a

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_{E'}^*(x, y, z) = E'\psi_{E'}^*(x, y, z), \quad (6.84)$$

Por lo tanto, multiplicando  $\psi_{E'}^*$  por (6.82) y  $\psi_E$  por (6.84) se encuentra

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{E'}^*\nabla^2\psi_E + U(x,y,z)\psi_{E'}^*\psi_E &= E\psi_{E'}^*\psi_E, \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E\nabla^2\psi_{E'}^* + U(x,y,z)\psi_E\psi_{E'}^* &= E'\psi_E\psi_{E'}^*, \end{aligned}$$

Ahora, considerando la igualdad

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) = (\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}g) + f\nabla^2g, \quad (6.85)$$

se llega a

$$f\nabla^2g = \vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) - (\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}g), \quad (6.86)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} \cdot (\psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E) - \vec{\nabla}\psi_{E'}^* \cdot \vec{\nabla}\psi_E\right) + U\psi_{E'}^*\psi_E &= E\psi_{E'}^*\psi_E, \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} \cdot (\psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^*) - \vec{\nabla}\psi_E \cdot \vec{\nabla}\psi_{E'}^*\right) + U\psi_E\psi_{E'}^* &= E'\psi_E\psi_{E'}^*, \end{aligned}$$

restando estas ecuaciones se encuentra

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla} \cdot (\psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E - \psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^*) = (E - E')\psi_{E'}^*\psi_E.$$

Integrando sobre el volumen  $V$  y considerando el teorema de Gauss se tiene

$$(E - E') \int_V dv \psi_{E'}^*\psi_E = \frac{\hbar^2}{2m} \oint_{\Sigma} da \left( \psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E - \psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^* \right) \cdot \hat{n} = 0, \quad (6.87)$$

es decir

$$(E - E') \int_V dv \psi_{E'}^*\psi_E = 0. \quad (6.88)$$

Por lo tanto, si  $E \neq E'$  se llega a

$$\int_V dv \psi_{E'}^*(x,y,z)\psi_E(x,y,z) = 0, \quad (6.89)$$

si la funciones de onda son tales que  $\int_V dv \psi_E^*\psi_E = \alpha < \infty$  siempre se puede tener un conjunto de funciones tales que

$$\int_V dv \psi_{E'}^*(x,y,z)\psi_E(x,y,z) = \delta_{EE'}. \quad (6.90)$$

Por lo tanto con las soluciones de la ecuación de Schrodinger se puede formar un conjunto ortonormal de funciones. Este resultado es fundamental para la mecánica cuántica.

### 6.7.5. Armónicos esféricos

Otro ejemplo está en las funciones propias del operado  $\hat{L}^2$ ,

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi),$$

que deben satisfacer

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_\lambda(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi).$$

Por ahora no resolveremos esta ecuación pero veremos algunas de sus propiedades respecto a la ortonormalidad.

Propondremos  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , de donde

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[ \frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin^2 \theta \hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)} \right) &= - \left[ \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= \lambda \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.91)$$

que implica

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sin^2 \theta \hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)} \right) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (6.92)$$

entonces

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 = \text{cte}, \quad (6.93)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi). \quad (6.94)$$

Sustituyendo (6.93) en (6.91), se llega a

$$- \left[ \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - m^2 \right] = \lambda \sin^2 \theta, \quad (6.95)$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left( \lambda \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (6.96)$$

Esta ecuación depende de los parámetros  $\lambda$  y  $m$  por lo que redifiniremos  $\Theta(\theta)$  como  $\Theta(\theta) = P_\lambda^m(\cos \theta)$ . Note que la ecuación (6.96) es tipo Sturm-Liouville con  $p(\theta) = \sin \theta$ ,  $q(\theta) = \sin \theta$ ,  $r(\theta) = -\frac{m^2}{\sin \theta}$ . Además como  $p(0) = \sin 0 = 0$ ,  $p(\pi) = \sin \pi = 0$ , las soluciones de (6.96) son ortormales en el intervalo  $[0, \pi]$  con función de peso  $\sin \theta$ , es decir

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) = \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda' \lambda}, \quad \alpha_{\lambda m} = \text{cte} > 0. \quad (6.97)$$

Note que las funciones

$$\Phi_m(\varphi) = A_0 e^{im\varphi} \quad (6.98)$$

son soluciones de la ecuación (6.94). En particular si todas las  $m$  son enteros el conjunto de funciones

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.99)$$

son ortonormales en intervalo  $[0, 2\pi]$ , como fue mostrado en (6.70). Si el conjunto de las  $m$  está en los enteros, las funciones

$$Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}} \sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \quad (6.100)$$

son ortonormales. En efecto, considerando la ortonormalidad de las funciones  $\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$  y  $P_\lambda^m(\cos \theta)$ , se tiene

$$\begin{aligned} & \langle Y_{\lambda' m'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= \int d\Omega Y_{\lambda' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{\lambda' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda' m'}} \sqrt{2\pi}} e^{im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \right)^* \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}} \sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda' m'}} \sqrt{2\pi}} e^{-im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}} \sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda' m'}} \sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \delta_{mm'} \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda},
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle Y_{\lambda'm'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (6.101)$$

Aún no sabemos como son de forma explícita la funciones  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ , pero podemos decir que son un conjunto de funciones ortonormales. Posteriormente ocuparemos este hecho para encontrar la forma explícita de las funciones  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ .

La funciones  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$  son importantes para diferentes áreas de la física, como la mecánica cuántica y la electrodinámica.

## 6.8. Polinomios Trigonométricos

Supongamos que  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo  $[a, b]$ , es decir

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_n^*(x) \psi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (6.102)$$

aquí  $q(x)$  es una función de peso positiva en el intervalo  $(a, b)$ . Con este conjunto de funciones podemos hacer las combinaciones lineales

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(x), \quad (6.103)$$

a estas combinaciones lineales les llamaremos polinomios trigonométricos. Note que debido a que  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es un conjunto de funciones ortonormales, la norma de  $T_n(x)$  es

$$||T_n||^2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2. \quad (6.104)$$



Sea  $F(x)$  una función tal que  $\langle F|F \rangle = \|F\|^2 = \int_a^b dx q(x) |F(x)|^2 < \infty$ , entonces definiremos los coeficientes de Fourier de  $F$  como

$$a_n = \langle \psi_n | F \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_n^*(x) F(x). \quad (6.105)$$

Ahora veremos que tanto se puede aproximar la función  $F(x)$  con polinomios de la forma  $T_n(x)$ . El sentido de la distancia en este espacio está dada por la norma de las funciones. Así, el problema es encontrar los polinomios tales que

$$d^2(F, T_n) = \|F - T_n\|^2 = \int_a^b dx q(x) |F(x) - T_n(x)|^2 \quad (6.106)$$

es mínimo. Básicamente se trata de encontrar los coeficientes  $b_i$  que hacen mínimo (6.106). Pondremos inicio notando que

$$\begin{aligned} d^2(F, T_n) &= \|F - T_n\|^2 = \langle F - T_n | F - T_n \rangle \\ &= \langle F | F \rangle - \langle F | T_n \rangle - \langle T_n | F \rangle + \langle T_n | T_n \rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \langle F | T_n \rangle - \langle T_n | F \rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \left\langle F \left| \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \right. \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n b_i \psi_i | F \right\rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \sum_{i=1}^n b_i^* \langle F | \psi_i \rangle - \sum_{i=1}^n b_i \langle \psi_i | F \rangle, \end{aligned}$$

considerando la norma de  $T_n(x)$  y la definición de los coeficientes de Fourier se llega a

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 + \sum_{i=1}^n (|b_i|^2 - b_i a_i^* - b_i^* a_i). \quad (6.107)$$

Ahora, como

$$|b_i - a_i|^2 = (b_i - a_i)(b_i - a_i)^* = |b_i|^2 + |a_i|^2 - (b_i a_i^* + b_i^* a_i), \quad (6.108)$$

se tiene

$$|b_i - a_i|^2 - |a_i|^2 = |b_i|^2 - (b_i a_i^* + b_i^* a_i). \quad (6.109)$$

Por lo que

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 + \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (6.110)$$

Claramente la distancia entre estas dos funciones es mínima cuando  $b_i = a_i$ , es decir, cuando el polinomio tienen los coeficientes de Fourier.

Si  $b_i = a_i$  se encuentra

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0. \quad (6.111)$$

Por lo que, para cualquier  $n$

$$\|T_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \|F\|^2 < \infty. \quad (6.112)$$

Esta desigualdad se llama la desigualdad de Bessel, la cual implica que la sucesión  $\|T_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$  está acotada.

Un resultado de cálculo diferencial nos dice que si una sucesión es monotona creciente y está acotada, converge [1]. Note que la sucesión  $\|T_n\|^2$  es monotona creciente y como está acotada, entonces converge. La pregunta es hacia donde converge, supondremos sin demostrar que converge a  $\|F\|^2$ , es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 = \|F\|^2. \quad (6.113)$$

A esta igualdad se llama igualdad de Parseval. Demostrar esta igualdad es un problema importante [5, 6], pero altamente no trivial y rebasa el propósito de este escrito por lo que solo lo tocamos este tema en casos particulares.

## 6.9. Espacios completos

Cuando se cumple la igualdad de Parseval se dice que el conjunto de funciones  $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 0}$  es completo. En este caso cualquier función,  $F(x)$  con  $\|F\| < \infty$  se puede escribir como combinación lineal de  $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 0}$ , es decir

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \psi_n(x). \quad (6.114)$$

Un resultado de cálculo diferencial es que si  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2$  converge, entonces  $a_n \rightarrow 0$ .

Esto tiene diferentes implicaciones físicas. Por ejemplo, en mecánica cuántica significa que es más probable que el sistema esté en estado base. Mientras que en electrostática, significa que en un sistema de cargas son los términos más importantes son el monopolo, dipolo, cuádrupolo. Posteriormente veremos ejemplos concretos de esta afirmación.

## 6.10. Operadores Lineales

Sea  $V$  un espacio vectorial, una función  $O : V \rightarrow V$  es un operador lineal o transformación lineal si

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad O(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \quad (6.115)$$

Por ejemplo, el operador derivada es lineal, pues

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) + \beta \frac{\partial}{\partial x} f_2(x). \quad (6.116)$$

Usando el producto por un escalar, con una función  $f(x)$  podemos definir un operador lineal,  $O$ , de la forma:

$$O(v_1) = f(x)v_1,$$

claramente este operador es lineal, pues

$$O(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(x)(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(x)v_1 + f(x)\beta v_2 = \alpha O(v_1) + \beta O(v_2).$$

Dada una función  $g(k, x)$  se puede definir una transformación con la integral

$$\tilde{f}(k) = \int_a^b dx g(k, x) f(x). \quad (6.117)$$

Esta transformación es lineal, pues si definimos  $h(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$  se encuentra

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \int_a^b dx g(k, x) h(x) = \int_a^b dx g(k, x) (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) \\ &= \alpha \int_a^b dx g(k, x) f_1(x) + \beta \int_a^b dx g(k, x) f_2(x) = \alpha \tilde{f}_1(k) + \beta \tilde{f}_2(k). \end{aligned}$$

A (6.118) se le llama transformada integral en base  $g(k, x)$ .

Por ejemplo, con  $g(k, x) = e^{-ikx}$  se define la transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (6.118)$$

Para cada función,  $g(k, x)$ , bien portada se puede definir una transformada integral.

Si tenemos dos transformaciones lineales,  $O_1$  y  $O_2$ , cualquier combinación lineal de ellas también es lineal. En efecto, si  $a$  y  $b$  son dos escalares podemos construir la combinación lineal

$$O = aO_1 + bO_2, \quad (6.119)$$

entonces

$$\begin{aligned} O(\alpha v_1 + \beta v_2) &= (aO_1 + bO_2)(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= aO_1(\alpha v_1 + \beta v_2) + bO_2(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= a(\alpha O_1(v_1) + \beta O_1(v_2)) + b(\alpha O_2(v_1) + \beta O_2(v_2)) \\ &= \alpha(aO_1(v_1) + bO_2(v_1)) + \beta(aO_1(v_2) + bO_2(v_2)) \\ &= \alpha(aO_1 + bO_2)(v_1) + \beta(aO_1 + bO_2)(v_2) \\ &= \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier combinación lineal de dos operadores lineales nos da otro operador lineal.

Ahora veamos el productor de dos operadores lineales, definamos

$$O = O_1 O_2, \quad (6.120)$$

entonces

$$\begin{aligned} O(\alpha v_1 + \beta v_2) &= (O_1 O_2)(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= O_1(O_2(\alpha v_1 + \beta v_2)) = O_1(\alpha O_2(v_1) + \beta O_2(v_2)) \\ &= \alpha O_1(O_2(v_1)) + \beta O_1(O_2(v_2)) \\ &= \alpha(O_1 O_2)(v_1) + \beta(O_1 O_2)(v_2) \\ &= \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto de dos operadores lineales también nos da otro operador lineal. Por ejemplo, sabemos que los operadores

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.121)$$

son lineales, entonces también lo son

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.122)$$

Esto implica que el operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.123)$$

sea lineal. Cualquier función  $V(x, y, z)$  como operador es lineal, entonces el operador Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \quad (6.124)$$

es lineal, esto se debe a que es combinación lineal de operadores lineales. Además las variables

$$x, \quad y, \quad z \quad (6.125)$$

como operadores son lineales. Entonces los operadores

$$L_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

son lineales, puesto que son combinaciones lineales de productos de operadores lineales. Por la misma razón el operador

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

es lineal.

## 6.11. Operador Adjunto

Dado un operador  $A$  definiremos el operador adjunto,  $A^\dagger$ , como el operador que satisface

$$\langle Av | u \rangle = \langle v | A^\dagger u \rangle, \quad (6.126)$$

con  $u$  y  $v$  cualquier dos vectores.

### 6.11.1. Matrices

Por ejemplo, para  $\mathbf{C}^n$  se tiene

$$\langle Av|u\rangle = (Av)^{*T}u = v^{*T}A^{*T}u = \langle v|A^\dagger u\rangle = v^{*T}A^\dagger u, \quad (6.127)$$

de donde, para una matriz cuadrada con entradas complejas la matriz adjunta es

$$A^\dagger = A^{*T}. \quad (6.128)$$

### 6.11.2. Derivada

Para el espacio vectorial de las funciones, el adjunto de un operador depende fuertemente del dominio, las condiciones de borde que se satisfacen y el producto escalar. Por ejemplo, el operador

$$A = \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6.129)$$

con  $\alpha$  un número complejo, puede actuar en las funciones  $\psi(x)$  definidas en el intervalo  $[a, b]$  integrables y que cumplen  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ . Veamos cual es el operador adjunto de este operador, para ello tomaremos el producto escalar como función de peso  $q(x) = 1$ . En este caso se puede notar que

$$\begin{aligned} \langle A\psi_1|\psi_2\rangle &= \int_a^b dx (A\psi_1(x))^* \psi_2(x) = \int_a^b dx \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) \right)^* \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \frac{\partial \psi_1^*(x)}{\partial x} \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \left( \frac{\partial (\psi_1^*(x) \psi_2(x))}{\partial x} - \psi_1^*(x) \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} \right) \\ &= \alpha^* (\psi_1^*(x) \psi_2(x)) \Big|_a^b + \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left( -\alpha^* \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} \right) \\ &= \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left( -\alpha^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x), \end{aligned}$$

ahora

$$\langle \psi_1|A^\dagger \psi_2\rangle = \int_a^b dx \psi_1^*(x) A^\dagger \psi_2(x),$$

entonces

$$\left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^\dagger = -\alpha^* \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.130)$$

Note que este resultado depende fuertemente de que se cumpla  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ .

### 6.11.3. Derivada con peso

Se puede observar que el adjunto del operador  $A = \alpha \frac{\partial}{\partial x}$  no está bien definido con un producto escalar general

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x), \quad q(x) > 0. \quad (6.131)$$

Para este caso es más conveniente ocupar el operador

$$\tilde{A} = \frac{\alpha}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6.132)$$

quien si tiene bien definido su adjunto. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}\psi_1 | \psi_2 \rangle &= \int_a^b dx q(x) (\tilde{A}\psi_1(x))^* \psi_2(x) \\ &= \int_a^b dx q(x) \left( \frac{\alpha}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) \right)^* \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \frac{\partial \psi_1^*(x)}{\partial x} \psi_2(x) = \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left( -\alpha^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x), \\ &= \int_a^b dx q(x) \psi_1^*(x) \left( \frac{-\alpha^*}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x) \end{aligned} \quad (6.133)$$

ahora

$$\langle \psi_1 | \tilde{A}^\dagger \psi_2 \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_1^*(x) \tilde{A}^\dagger \psi_2(x),$$

de donde

$$\tilde{A}^\dagger = -\frac{\alpha^*}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.134)$$

### 6.11.4. Propiedades del operador adjunto

Hay dos propiedades importantes de los operadores adjuntos. La primera propiedad está relacionada con las suma. Si  $A, B$  son dos operadores lineales, se tiene

$$\langle (A + B) v | u \rangle = \langle v | (A + B)^\dagger u \rangle, \quad (6.135)$$

pero

$$\begin{aligned}\langle (A + B) v | u \rangle &= \langle (Av + Bv) | u \rangle = \langle Av | u \rangle + \langle Bv | u \rangle \\ &= \langle v | A^\dagger u \rangle + \langle v | B^\dagger u \rangle = \langle v | (A^\dagger + B^\dagger) u \rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle v | (A + B)^\dagger | u \rangle = \langle v | (A^\dagger + B^\dagger) u \rangle,$$

este resultado es válido para cualquier par de vectores  $v$  y  $u$ , entonces

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger. \quad (6.136)$$

La otra propiedad está relacionada con el producto de dos operadores:

$$\langle (AB) v | u \rangle = \langle A (Bv) | u \rangle = \langle Bv | A^\dagger u \rangle = \langle v | B^\dagger A^\dagger u \rangle = \langle v | (AB)^\dagger u \rangle,$$

que implica

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \quad (6.137)$$

## 6.12. Operadores Hermíticos

Una clase importante de operadores son los autoadjuntos, que satisfacen

$$A^\dagger = A, \quad (6.138)$$

a estos operadores también se les llama Hermíticos.

De (6.136) se puede ver que la suma de dos operadores Hermíticos nos da un operador Hermítico. Además de (6.137) es claro que si  $A$  y  $B$  son operadores Hermíticos y **conmutan**, es decir  $AB = BA$ , entonces

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA = AB. \quad (6.139)$$

Por lo tanto, el producto de dos operadores Hermíticos que **conmutan** es Hermítico.



### 6.12.1. Ejemplos de Matrices Hermíticas

De (6.128) se puede ver que una matriz de  $\mathbf{C}^n$  Hermítica cumple

$$(\Lambda)^{*T} = \Lambda. \quad (6.140)$$

En  $\mathbf{C}^2$  un ejemplo trivial una matriz Hermítica es la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.141)$$

En ese mismo espacio, se puede ver que la matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.142)$$

son Hermíticas.

### 6.12.2. Ejemplos de operadores Hermíticos

En el espacio de funciones, claramente cualquier función real  $f(\vec{r})$  es un operador Hermítico. De (6.130) se puede ver que si  $\alpha$  es imaginario, por ejemplo si  $\alpha = -i\hbar$  el operador

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.143)$$

es Hermítico. Además, como  $P_x$  conmuta con  $P_x$ , entonces  $\hat{P}_x \hat{P}_x = \hat{P}_x^2$  es un operador Hermítico. Si  $V(x)$  es un potencial real, el operador Hamiltoniano de la mecánica cuántica

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{P}_x^2 + V(x) \quad (6.144)$$

es Hermítico, pues es la suma de dos operadores Hermíticos.

Claramente los operadores

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{P}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{P}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.145)$$

son Hermíticos. Entonces, si  $V(\vec{r})$  es una función real, el operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$$

es Hermítico.

Si  $\eta$  y  $\xi$  son variables independientes, entonces definiendo

$$O_1 = \eta, \quad O_2 = -i \frac{\partial}{\partial \xi}$$

se tiene

$$O_1 O_2 f = \eta (-i) \frac{\partial f}{\partial \xi} = (-i) \frac{\partial}{\partial \xi} \eta f = O_2 O_1 f,$$

es decir  $\eta$  y  $\left(-i \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$  conmutan. Así los operadores

$$\begin{aligned} xp_y &= x(-i) \frac{\partial}{\partial y}, & xp_z &= x(-i) \frac{\partial}{\partial z}, \\ yp_x &= y(-i) \frac{\partial}{\partial x}, & yp_z &= y(-i) \frac{\partial}{\partial z}, \\ zp_x &= z(-i) \frac{\partial}{\partial x}, & zp_y &= z(-i) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

son Hermíticos. Por lo tanto, también los operadores

$$\hat{L}_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

son Hermíticos. Esto implica que el operador

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

es Hermítico.

## 6.13. Conmutador

Supongamos que tenemos los operadores lineales  $A$  y  $B$ , entonces definiremos el conmutador como

$$[A, B] = AB - BA. \quad (6.146)$$

Por ejemplo, si  $f$  es una función de prueba y tenemos los operadores  $x, y$  se tiene

$$(xy)f = xyf = yxf = (yx)f, \quad (6.147)$$

de donde

$$(xy - yx) f = 0. \quad (6.148)$$

Este resultado es válido para cualquier función, por lo que se suele escribir

$$[x, y] = 0. \quad (6.149)$$

Por lo misma razón se encuentra

$$[x, z] = [z, y] = 0. \quad (6.150)$$

Además si  $f$  es una función bien portada se cumple

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f,$$

entonces si

$$p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6.151)$$

se llega a

$$\begin{aligned} (p_y p_x) f &= \left( (-i) \frac{\partial}{\partial y} (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = (-i)(-i) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f \\ &= \left( (-i) \frac{\partial}{\partial y} (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = p_x p_y f, \end{aligned}$$

que nos conduce a

$$[p_x, p_y] = 0. \quad (6.152)$$

De la misma forma se tiene

$$[p_x, p_z] = [p_y, p_z] = 0. \quad (6.153)$$

Con los operadores  $y, p_x$  se tiene

$$(y p_x) f = \left( y (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -iy \frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial (yf)}{\partial x} = (p_x y) f,$$

por lo tanto,

$$[y, p_x] = 0. \quad (6.154)$$

con los mismos argumentos se encuentra

$$[y, p_z] = [x, p_y] = [x, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0. \quad (6.155)$$

Ahora, si  $x, p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$ , entonces

$$\begin{aligned} (xp_x)f &= \left( x(-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -ix \frac{\partial f}{\partial x}, \\ (p_x x)f &= \left( (-i) \frac{\partial}{\partial x} x \right) f = -i \frac{\partial}{\partial x} (xf) = -if - ix \frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

es decir

$$(xp_x - p_x x) f = if. \quad (6.156)$$

Como este resultado es válido para cualquier función, se escribe

$$[x, p_x] = i. \quad (6.157)$$

También se tiene

$$[y, p_y] = i, \quad [z, p_z] = i. \quad (6.158)$$

Si definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ p_1 &= -i \frac{\partial}{\partial x_1}, & p_2 &= -i \frac{\partial}{\partial x_2}, & p_3 &= -i \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (6.159)$$

las anteriores reglas de conmutación se pueden escribir

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (6.160)$$

Salvo un factor de  $\hbar$ , estas son las reglas de conmutación las propuso Heisenberg como base de la mecánica cuántica.

### 6.13.1. Propiedades de los conmutadores

Los conmutadores tiene varias propiedades algebraicas que los hacen importantes para la Física y las Matemáticas, a continuación veremos algunas de ellas. Sea  $c$  un número, entonces si  $A, B, C$  son operadores lineales se cumple

$$[A, c] = 0, \quad (6.161)$$

$$[A, B] = -[B, A], \quad (6.162)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad (6.163)$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \quad (6.164)$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [A, C]] = 0. \quad (6.165)$$

La identidad (6.161) es válida pues  $c$  es un número. La prueba de (6.162) es

$$[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B].$$

Mientras que la prueba de (6.163) es

$$\begin{aligned} [A, B + C] &= A(B + C) - (B + C)A = (AB + AC) - (BA + CA) \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) = [A, B] + [A, C]. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} [A, BC] &= A(BC) - (BC)A = (ABC) - (BAC) + (BAC) - (BCA) \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C], \end{aligned}$$

que prueba (6.164).

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, (BC - CB)] = [A, BC] - [A, CB] \\ &= B[A, C] + [A, B]C - (C[A, B] + [A, C]B) \\ &= B(AC - CA) + (AB - BA)C \\ &\quad - (C(AB - BA) + (AC - CA)B) \\ &= BAC + ABC + CBA + CAB \\ &\quad - (BCA + BAC + CAB + ACB) \\ &= ABC + CBA - (BCA + ACB), \end{aligned}$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} [C, [A, B]] &= CAB + BAC - (ABC + CBA), \\ [B, [C, A]] &= BCA + ACB - (CAB + BAC), \end{aligned}$$

sumando estas tres igualdades se llega a (6.165).

### 6.13.2. Ejercicio

Para tener un poco de práctica con los conmutaremos calcularemos las reglas de conmutación del momento angular (2.100), cuyas componentes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x. \end{aligned}$$

De donde aplicando las propiedades de los conmutadores y considerando (6.160) se llega

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x - xp_z] + [-zp_y, zp_x - xp_z] \\
&= [yp_z, zp_x - xp_z] - [zp_y, zp_x - xp_z] \\
&= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - ([zp_y, zp_x] - [zp_y, xp_z]) \\
&= y[p_z, zp_x] + [y, zp_x]p_z - y[p_z, xp_z] - [y, xp_z]p_z \\
&\quad - (z[p_y, zp_x] + [z, zp_x]p_y - z[p_y, xp_z] - [z, xp_z]p_y) \\
&= yz[p_z, p_x] + y[p_z, z]p_x + z[y, p_x]p_z + [y, z]p_xp_z - yx[p_z, p_z] \\
&\quad - y[p_z, x]p_z - x[y, p_z]p_z - [y, x]p_zp_z - z[p_y, p_x] - z[p_y, z]p_x \\
&\quad - z[z, p_x]p_y - z[z, p_y]p_x + zx[p_y, p_z] + z[p_y, x]p_z \\
&\quad + x[z, p_z]p_y + [z, x]p_zp_y \\
&= i(xp_y - yp_x) = iL_z
\end{aligned} \tag{6.166}$$

Además

$$\begin{aligned}
[L_y, L_z] &= [zp_x - xp_z, xp_y - yp_x] = [zp_x, xp_y - yp_x] - [xp_z, xp_y - yp_x] \\
&= [zp_x, xp_y] + [xp_z, yp_x] = z[p_x, x]p_y + y[x, p_x]p_z \\
&= i(yp_z - zp_y) = iL_x, \\
[L_z, L_x] &= [xp_y - yp_x, yp_z - zp_y] = [xp_y, yp_z - zp_y] - [yp_x, yp_z - zp_y] \\
&= [xp_y, yp_z] + [yp_x, zp_y] = x[p_y, y]p_z + z[y, p_y]p_x \\
&= i(zp_x - xp_z) = iL_y.
\end{aligned} \tag{6.167}$$

Es decir,

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_z, L_x] = iL_y, \quad [L_y, L_z] = iL_x. \tag{6.168}$$

Ahora, considerando  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  y (6.168) se tiene

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x] = [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\
&= -iL_yL_z - iL_zL_y + iL_zL_y + iL_yL_z = 0, \\
[L^2, L_y] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_y] = [L_x^2, L_y] + [L_y^2, L_y] + [L_z^2, L_y] \\
&= L_x[L_x, L_y] + [L_x, L_y]L_x + L_z[L_z, L_y] + [L_z, L_y]L_z \\
&= iL_xL_z + iL_zL_x - iL_zL_x - iL_xL_z = 0, \\
[L^2, L_z] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z] = [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + [L_z^2, L_z] \\
&= L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x + L_y[L_y, L_z] + [L_y, L_z]L_y \\
&= -iL_xL_y - iL_yL_x + iL_yL_x + iL_xL_y = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $L^2$  conmuta con cualquier componente del momento angular

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0. \quad (6.169)$$

## 6.14. Conmutadores y la Derivada

Una de las propiedades del conmutador entre dos operadores es que en algunos casos actúa como derivada. En efecto supongamos que

$$[A, B] = \alpha, \quad \alpha = \text{cte}, \quad (6.170)$$

entonces

$$[A, B^2] = [A, BB] = B[A, B] + [A, B]B = B\alpha + B\alpha = 2\alpha B. \quad (6.171)$$

En general se cumple

$$[A, B] = \alpha \quad \implies \quad [A, B^n] = \alpha n B^{n-1}. \quad (6.172)$$

Probaremos esta afirmación por inducción. La hipótesis de inducción ya la hemos probado. Para probar el paso inductivo debemos mostrar que

$$[A, B^k] = \alpha k B^{k-1} \quad \implies \quad [A, B^{k+1}] = \alpha(k+1)B^k. \quad (6.173)$$

Esta última igualdad es correcta, pues ocupando la hipótesis de inducción y (6.163) se encuentra

$$\begin{aligned} [A, B^{k+1}] &= [A, BB^k] = B[A, B^k] + [A, B]B^k = \alpha k BB^{k-1} + \alpha B^k \\ &= \alpha(k+1)B^k, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. Por lo tanto, la propiedad (6.172) es válida para cualquier natural  $n$ . Así, en este caso el conmutador actúa como derivada.

Para ver de forma más explícita esta afirmación, supongamos que tenemos la función

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n,$$

con la cual podemos formar el operador

$$f(B) = \sum_{n \geq 0} b_n B^n.$$

De donde,

$$\begin{aligned} [A, f(B)] &= \left[ A, \sum_{n \geq 0} b_n B^n \right] = \sum_{n \geq 0} b_n [A, B^n] = \sum_{n \geq 0} b_n \alpha n B^{n-1} \\ &= \alpha \sum_{n \geq 0} b_n n B^{n-1} = \alpha \frac{df(B)}{dB}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier función

$$[A, B] = \alpha, \quad \implies \quad [A, f(B)] = \alpha \frac{df(B)}{dB}. \quad (6.174)$$

Por ejemplo, sabemos que con  $p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$  se cumple  $[x, p_x] = i$ , entonces si  $f$  y  $g$  son dos funciones se encuentra

$$\begin{aligned} [f(x), p_x] &= i \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\ [x, g(p_x)] &= i \frac{\partial g(p_x)}{\partial p_x}. \end{aligned}$$

Esta igualdades son de gran utilidad para obtener ecuaciones de movimiento en mecánica cuántica. En efecto, dado un Hamiltoniano  $\hat{H}$  las ecuaciones de movimiento se definen como

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= [x, H], \\ i\dot{p} &= [p, H], \end{aligned} \quad (6.175)$$

que son las ecuaciones de Heisenger. En particular con el Hamiltoniano  $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$ , se tiene

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= [x, H] = \left[ x, \frac{1}{2m}p^2 \right] = \frac{i}{m}p, \\ i\dot{p} &= [p, H] = [p, V(x)] = -i \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.176)$$

es decir

$$\dot{x} = \frac{1}{m}p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}.$$



## 6.15. Vectores propios

Sea  $A$  un operador lineal, si  $v$  es un vector tal que  $Av = \lambda v$ , se dice que  $v$  es un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ . Al conjunto de valores propios de  $A$  se le llama el espectro de  $A$ .

Por ejemplo, los vectores propios del operador derivada deben cumplir

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \lambda f(x), \quad (6.177)$$

que son las funciones de la forma  $f(x) = A_0 e^{\lambda x}$ ,  $A_0 = \text{cte}$ . En la física matemática es importante obtener las funciones propias y valores propios de diferentes operadores, como el momento angular (2.110)

$$L^2 Y_{\lambda m} = \lambda Y_{\lambda m}, \quad L_z Y_{\lambda m} = m Y_{\lambda m}, \quad (6.178)$$

y el operador Hamiltoniano

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (6.179)$$

### 6.15.1. Espectro de operadores Hermíticos

Los operadores Hermíticos tienen valores propios reales. En efecto, si  $v$  es un vector propio de  $A$  con valor propio de  $\lambda$ , es decir  $Av = \lambda v$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle Av | v \rangle &= \langle \lambda v | v \rangle = \lambda^* \langle v | v \rangle \\ &= \langle v | A^\dagger v \rangle = \langle v | Av \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \lambda \langle v | v \rangle, \end{aligned}$$

que nos conduce al resultado

$$\lambda^* = \lambda. \quad (6.180)$$

Así, los valores propios de los operadores Hermíticos son reales.

Como el operador  $\hat{H}$  es Hermítico, la ecuación diferencial

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \left( \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

sólo tiene solución si  $E$  es un valor real. Posteriormente veremos como resolver esta ecuación para algunos casos particulares de  $V(\vec{r})$ .

De la misma forma, como  $\hat{L}^2$  es Hermítico, la ecuación diferencial

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_\lambda(\theta, \varphi) = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi)$$

solo tiene solución si  $\lambda$  es un número real. Las soluciones de esta ecuación se llaman armónicos esféricos y son de suma importancia para la electrostática y la mecánica cuántica.

### 6.15.2. Operadores que conmutan

Se dice que un operador  $A$  tiene espectro no degenerado si

$$Av = \lambda v \quad \text{y} \quad Au = \lambda u \implies \exists \alpha, \quad v = \alpha u. \quad (6.181)$$

Por ejemplo, el operador derivada tiene espectro no degenerado, pues todas las soluciones de (6.177) son de la forma  $e^{\lambda x}$ , en particular

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

tiene espectro no degenerado.

Supongamos que  $A$  y  $B$  son dos operadores lineales que conmutan, es decir

$$[A, B] = 0$$

y que  $A$  tiene espectro no degenerado. Entonces podemos afirmar que si  $v$  es vector propio de  $A$ , es decir  $Av = \lambda v$ , también lo es de  $B$ . Esta afirmación es correcta pues si  $AB = BA$ , entonces

$$ABv = BAv = B(Av) = \lambda Bv \implies A(Bv) = \lambda(Bv). \quad (6.182)$$

Así,  $(Bv)$  es vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ . De donde, como  $A$  tiene espectro no degenerado, existe  $\beta$  tal que

$$Bv = \beta v.$$

Esto quiere decir que  $v$  es vector propio de  $B$ , lo que completa la prueba.

Por ejemplo,  $L_z$  tiene espectro no degenerado y conmuta con  $L^2$ . Por lo tanto, estos operadores comparten funciones propias. En el lenguaje de la mecánica cuántica significa que estas dos cantidades se pueden medir al mismo tiempo.

## Capítulo 7

# Prueba de Feynman de dos ecuaciones de Maxwell

Como un ejercicio largo para reforzar el uso de conmutadores y vectores veremos la prueba de Feynman de las ecuaciones de Maxwell.

Apesar de que las ecuaciones de Maxwell se obtienen de mediciones de la naturaleza, Feynman encontró que la ley de inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday se pueden deducir de la dinámica de una partícula.

La demostración parte de suponer la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t) \quad (7.1)$$

y las reglas de conmutación

$$[x_i, x_j] = 0, \quad m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (7.2)$$

Primero veremos como se obtiene la fuerza de Lorentz de esta hipótesis para después hacer la deducción de la ley de inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday.

### 7.1. Fuerza de Lorentz

Para iniciar, notemos que

$$x_i\ddot{x}_j = \frac{d}{dt}(x_i\dot{x}_j) - \dot{x}_i\dot{x}_j, \quad (7.3)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
[x_i, \ddot{x}_j] &= x_i \ddot{x}_j - \ddot{x}_j x_i = \left( \frac{d}{dt} (x_i \dot{x}_j) - \dot{x}_i \dot{x}_j \right) - \left( \frac{d}{dt} (\dot{x}_j x_i) - \dot{x}_j \dot{x}_i \right) \\
&= \frac{d}{dt} (x_i \dot{x}_j - \dot{x}_j x_i) + (\dot{x}_j \dot{x}_i - \dot{x}_i \dot{x}_j) \\
&= \frac{d}{dt} ([x_i, \dot{x}_j]) + [\dot{x}_j, \dot{x}_i] = [\dot{x}_j, \dot{x}_i],
\end{aligned} \tag{7.4}$$

es decir,

$$[x_i, \ddot{x}_j] = [\dot{x}_j, \dot{x}_i]. \tag{7.5}$$

Por lo tanto, de la segunda ley de Newton (7.1) se obtiene

$$[x_i, F_j] = [x_i, m\ddot{x}_j] = m[\dot{x}_j, \dot{x}_i]. \tag{7.6}$$

Además, considerando la propiedad antisimétrica de los conmutadores y (7.6) se llega a

$$[x_i, F_j] = m[\dot{x}_j, \dot{x}_i] = -m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -[x_j, F_i]. \tag{7.7}$$

De donde  $[x_i, F_j]$  es una matriz antisimétrica. Ahora, sabemos que cualquier matriz antisimétrica de  $3 \times 3$  se puede escribir en términos el tensor de Levi-Civita y un vector (1.70). Así, sin pérdida de generalidad podemos proponer

$$[x_i, F_j] = -\frac{i\hbar}{m} \epsilon_{ijk} B_k. \tag{7.8}$$

Note que de (7.6) y (7.8) se obtiene

$$[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = \frac{i\hbar}{m^2} \epsilon_{ijk} B_k. \tag{7.9}$$

En principio  $B_k$  puede depender de la velocidad, sin embargo, por la identidad de Jacobi

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_i]] = 0, \tag{7.10}$$

las reglas de conmutación (7.2), (7.6) y (7.8) se obtiene

$$[x_i, [x_j, F_k]] = -\frac{i\hbar}{m} [x_i, \epsilon_{jkl} B_l] = 0. \tag{7.11}$$

Por lo tanto,  $B_k$  solo depende de las coordenadas. Así, la igualdad (7.8) implica que  $F_i$  debe ser de la forma  $F_i = \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k$ . Note que la igualdad (7.8) se cumple si sumamos a  $F_i$  una función,  $E_i$ , que solo depende de las coordenadas. Así, la forma más general de la fuerza es

$$F_i = E_i + \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k. \tag{7.12}$$

Que es exactamente la fuerza de Lorentz.

## 7.2. Inexistencia de Monopolos Magnéticos

Ahora, veamos la ley de inexistencia de monopolos magnéticos. De Eq. (7.6) y Eq. (7.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] &= -\frac{\epsilon_{lij}}{m}[x_i, F_j] = -\frac{\epsilon_{lij}}{m} \left( \frac{-i\hbar}{m} \epsilon_{ijk} B_k \right) = \frac{i\hbar}{m^2} \epsilon_{lij} \epsilon_{ijk} B_k \\
 &= -\frac{i\hbar}{m^2} \epsilon_{lij} \epsilon_{jik} B_k = -\frac{i\hbar}{m^2} (\delta_{li} \delta_{jk} - \delta_{lk} \delta_{ji}) B_k = -\frac{i\hbar}{m^2} (\delta_{lk} - 3\delta_{lk}) B_k \\
 &= \frac{2i\hbar}{m^2} B_l,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

es decir,

$$B_l = \frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \dot{x}_j]. \tag{7.14}$$

Para continuar, notemos que si tenemos los operadores  $A_1, A_2, A_3$  la identidad de Jacobi se puede escribir como

$$\epsilon_{ijk}[A_i, [A_j, A_k]] = 0. \tag{7.15}$$

En particular, tomando  $A_i = \dot{x}_i$  y considerando (7.14) se tiene

$$0 = \epsilon_{ijk}[\dot{x}_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = [\dot{x}_i, \epsilon_{ijk}[\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = -\frac{2\hbar}{im^2}[\dot{x}_i, B_i] = \frac{i2\hbar}{im^2} \partial_i B_i = \frac{2\hbar}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{B},$$

es decir, se cumple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{7.16}$$

Que es la ley de inexistencia de monopolos magnéticos.

## 7.3. Ley de Faraday

Ahora veremos la deducción de la ley de Faraday. Primero notemos que ocupando las propiedades antisimétricas del tensor de Levi-Civita y del conmutador y renombrando índices se encuentra

$$\epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \ddot{x}_j] = \epsilon_{lji}[\ddot{x}_j, \dot{x}_i] = \epsilon_{lij}[\ddot{x}_i, \dot{x}_j], \tag{7.17}$$

es decir,

$$\epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \ddot{x}_j] = \epsilon_{lij}[\ddot{x}_i, \dot{x}_j]. \tag{7.18}$$

Claramente se cumple

$$\dot{B}_l = \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m}. \quad (7.19)$$

Además, considerando (7.14), (7.18) y (7.9) se encuentra

$$\begin{aligned} \dot{B}_l &= \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} = \frac{d}{dt} \left( \frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} [\dot{x}_i, \dot{x}_j] \right) = -\frac{im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \dot{x}_j - \dot{x}_j \dot{x}_i) \\ &= \frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} (\ddot{x}_i \dot{x}_j + \dot{x}_i \ddot{x}_j - \ddot{x}_j \dot{x}_i - \dot{x}_j \ddot{x}_i) \\ &= -\frac{im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} ([\ddot{x}_i, \dot{x}_j] + [\dot{x}_i, \ddot{x}_j]) = -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [m\ddot{x}_i, \dot{x}_j] \\ &= -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [F_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [E_i + \epsilon_{irs} \dot{x}_r B_s, \dot{x}_j] \\ &= -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} ([E_i, \dot{x}_j] + \epsilon_{irs} [\dot{x}_r B_s, \dot{x}_j]) \\ &= \epsilon_{lij} \partial_j E_i + \frac{im}{\hbar} \epsilon_{lji} \epsilon_{irs} (\dot{x}_r [B_s, \dot{x}_j] + [\dot{x}_r, \dot{x}_j] B_s) \\ &= -\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l + \frac{im}{\hbar} (\delta_{lr} \delta_{js} - \delta_{ls} \delta_{jr}) \left( \frac{i\hbar}{m} \dot{x}_r \frac{\partial B_s}{\partial x_j} + [\dot{x}_r, \dot{x}_j] B_s \right) \\ &= -\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l - \left( \dot{x}_l \frac{\partial B_s}{\partial x_s} - \dot{x}_j \frac{\partial B_l}{\partial x_j} \right) + \frac{im}{\hbar} [\dot{x}_l, \dot{x}_j] B_j - \frac{im}{\hbar} [\dot{x}_r, \dot{x}_r] B_l \\ &= -\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l - \dot{x}_l \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} - \frac{1}{m} \epsilon_{ljr} B_r B_j \\ &= -\left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Por lo tanto, igualando (7.19) con (7.20) se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.21)$$

que es la ley de Faraday.

Es notable que la fuerza de Lorentz y dos ecuaciones de Maxwell se puedan extraer partiendo solo de las reglas de conmutación y la segunda ley de Newton. Hay diversas opiniones sobre este hecho. Algunos piensan que hay algo profundo en este resultado, el cual aún no hemos comprendido. Pero también hay quienes piensan que es un resultado sin importancia y otros que creen tener una explicación de esta prueba. Feynman encontró esta prueba pero no la publicó, solo se la conto a algunos de sus amigos. Fue Dyson quien mando a publicar el resultado después de la muerte de Feynman [?].

## Capítulo 8

# El oscilador armónico y los polinomios de Hermite

El operador Hamiltoniano para el oscilador armónico en una dimensión es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \quad (8.1)$$

De donde la ecuación de onda estacionaria es

$$\hat{H}\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (8.2)$$

Esta ecuación está definida en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  y se deben cumplir las condiciones de Dirichlet  $\psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0$ , resolver el problema equivale a encontrar las funciones propias  $\psi(x)$  y los valores propios  $E$ .

Aún sin resolver el problema sabemos que  $E$  debe ser real, pues  $p$  y  $x$  son operadores Hermíticos. Además para cualquier función  $f$  se cumple

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle pf|pf \rangle = \langle f|p^\dagger pf \rangle = \langle f|p^2 f \rangle, \\ 0 &\leq \langle xf|xf \rangle = \langle f|x^\dagger xf \rangle = \langle f|x^2 f \rangle, \end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \langle f|Hf \rangle = \left\langle f \left| \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right) f \right. \right\rangle. \quad (8.3)$$

En particular si  $f = \psi$  y  $H\psi = E\psi$  se tiene

$$0 \leq E \langle \psi|\psi \rangle. \quad (8.4)$$

De este resultado es claro que si  $E < 0$ , entonces  $\langle \psi|\psi \rangle = 0$ , que implica que  $\psi(x) = 0$ . Además, si  $\langle \psi|\psi \rangle \neq 0$ , entonces  $E \geq 0$ . Es decir, la única solución con valor propio negativo es  $\psi(x) = 0$ , en cualquier otro caso  $E \geq 0$ .

### 8.0.1. Ortonormalidad

También podemos ver que la ecuación (8.2) es tipo Sturm-Liouville, por lo que sus soluciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet  $\psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0$  con valores propios diferentes, son ortogonales. Es decir, si  $\psi_a(x)$  y  $\psi_b(x)$  son soluciones de la ecuación (8.2) con los valores propios  $E_a$  y  $E_b$ , y además  $\psi_a(\pm\infty) = \psi_b(\pm\infty) = 0$ , entonces se cumple

$$(E_a - E_b) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = 0. \quad (8.5)$$

En particular, si  $E_a \neq E_b$ , tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = 0. \quad (8.6)$$

Por lo que las funciones de onda con diferente valor propio son ortonormales. Si  $E_a = E_b$ , entonces la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_a^*(x)$  es la norma de la función de onda, la cual supondremos que está normalizada, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_a(x)|^2 = 1. \quad (8.7)$$

Como este resultado es válido para cualquier valor propio, se encuentra

$$\langle \psi_a | \psi_b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a^*(x) \psi_b(x) = \delta_{ab}. \quad (8.8)$$

Por lo tanto, las funciones de onda del oscilador armónico forman una base ortonormal.

## 8.1. Operadores de acenso y decenso

Recordemos que se cumplen las reglas de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar, \quad [\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0. \quad (8.9)$$

Ahora, definamos el operador

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{p} - im\omega\hat{x}). \quad (8.10)$$



Como  $\hat{p}$  y  $\hat{x}$  son operadores hermíticos se tiene

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{p} + im\omega\hat{x}). \quad (8.11)$$

De donde

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p} + im\omega\hat{x}) (\hat{p} - im\omega\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} [\hat{p}(\hat{p} - im\omega\hat{x}) + im\omega\hat{x}(\hat{p} - im\omega\hat{x})] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}\hat{p} - im\omega\hat{p}\hat{x} + im\omega\hat{x}\hat{p} + m^2\omega^2\hat{x}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})) = \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + im\omega[\hat{x}, \hat{p}]) \\ &= \frac{2m}{2m\hbar\omega} \left( \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) = \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Por lo tanto,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (8.13)$$

Además, se cumple

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (8.14)$$

en efecto, tomando en cuenta (8.9) se encuentra

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \left[ \frac{(\hat{p} - im\omega\hat{x})}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \frac{(\hat{p} + im\omega\hat{x})}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right] = \frac{1}{2m\hbar\omega} [\hat{p} - im\omega\hat{x}, \hat{p} + im\omega\hat{x}] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} ([\hat{p}, \hat{p} + im\omega\hat{x}] - im\omega[\hat{x}, \hat{p} + im\omega\hat{x}]) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} ([\hat{p}, \hat{p}] + im\omega[\hat{p}, \hat{x}] - im\omega([\hat{x}, \hat{p}] + im\omega[\hat{x}, \hat{x}])) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (im(-i\hbar\omega) - im\omega(i\hbar)) = \frac{2m\hbar\omega}{2m\hbar\omega} = 1. \end{aligned}$$

También se cumplen las reglas de conmutación

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger, \quad (8.15)$$

pues

$$[\hat{H}, \hat{a}] = \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a})$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar\omega [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hbar\omega \hat{a}, \\
[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] &= \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a}^\dagger \right] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a}) \\
&= \hbar\omega \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega \hat{a}^\dagger.
\end{aligned}$$

Estas dos igualdades se pueden escribir como

$$\hat{H} \hat{a} = \hat{a} \hat{H} - \hbar\omega \hat{a}, \quad (8.16)$$

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{H} + \hbar\omega \hat{a}^\dagger. \quad (8.17)$$

Con la ayuda de estas identidades encontraremos los valores propios  $E$  y las funciones propias  $\psi(x)$  del operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ . Primero supongamos que  $\psi(x)$  satisface la ecuación  $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$  entonces las funciones

$$\psi_{-(1)}(x) = \hat{a}\psi(x), \quad \psi_{+(1)}(x) = \hat{a}^\dagger\psi(x), \quad (8.18)$$

satisfacen las ecuaciones

$$\hat{H}\psi_{-(1)}(x) = (E - \hbar\omega) \psi_{-(1)}(x), \quad (8.19)$$

$$\hat{H}\psi_{+(1)}(x) = (E + \hbar\omega) \psi_{+(1)}(x). \quad (8.20)$$

Para probar estas afirmaciones primero notemos que de (8.16) se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_{-(1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}\psi(x) = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a})\psi(x) = \hat{a}\hat{H}\psi(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi(x) \\
&= E\hat{a}\psi(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi(x) = (E - \hbar\omega)\hat{a}\psi(x) = (E - \hbar\omega)\psi_{-(1)}(x),
\end{aligned}$$

mientras que de (8.17) se encuentra

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_{+(1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}^\dagger\psi(x) = (\hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger)\psi(x) = \hat{a}^\dagger\hat{H}\psi(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi(x) \\
&= E\hat{a}^\dagger\psi(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi(x) = (E + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi(x) = (E + \hbar\omega)\psi_{+(1)}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función  $\psi_{-(1)}(x)$  es función propia de  $\hat{H}$  con valor propio  $E - \hbar\omega$ , mientras que  $\psi_{+(1)}(x)$  es función propia de  $\hat{H}$  con valor propio  $E + \hbar\omega$ . Es decir, si  $\psi$  es solución de la ecuación Schrodinger del oscilador armónico, la funciones  $\psi_{-(1)} = \hat{a}\psi$  y  $\psi_{+(1)} = \hat{a}^\dagger\psi$  también son soluciones de esta ecuación.

Por inducción se puede probar que las funciones

$$\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a})^n \psi(x), \quad \psi_{+(n)}(x) = (\hat{a}^\dagger)^n \psi(x), \quad (8.21)$$

satisfacen

$$\hat{H}\psi_{-(n)}(x) = (E - n\hbar\omega)\psi_{-(n)}(x), \quad (8.22)$$

$$\hat{H}\psi_{+(n)}(x) = (E + n\hbar\omega)\psi_{+(n)}(x). \quad (8.23)$$

Para ambos casos la base inductiva ya está probada, falta probar el paso inductivo. Primero probaremos el paso inductivo para las funciones  $\psi_{-(n)}(x)$ , en este caso debemos suponer que se cumple (8.22) y probar

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{-(n+1)}(x) &= [E - (n+1)\hbar\omega]\psi_{-(n+1)}(x), \quad \text{con} \\ \psi_{-(n+1)}(x) &= a\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a})^{n+1}\psi(x). \end{aligned}$$

Esta igualdad es cierta, pues de (8.16) y (8.22) se llega a

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{-(n+1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a})\psi_{-(n)}(x) \\ &= \hat{a}\hat{H}\psi_{-(n)}(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= (E - n\hbar\omega)\hat{a}\psi_{-(n)}(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= (E - n\hbar\omega - \hbar\omega)\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= [E - (n+1)\hbar\omega]\psi_{-(n+1)}(x), \end{aligned}$$

así la igualdad (8.22) se satisface para cualquier  $n$ .

Para el caso de  $\psi_{+n}(x)$  debemos suponer (8.23) y probar que se cumple

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{+(n+1)}(x) &= [E + (n+1)\hbar\omega]\psi_{+(n+1)}(x), \quad \text{con} \quad (8.24) \\ \psi_{+(n+1)}(x) &= a^\dagger\psi_{+(n)}(x) = (\hat{a}^\dagger)^{n+1}\psi(x). \end{aligned}$$

Esta igualdad también es cierta, pues, de (8.17) y (8.23) se encuentra

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{+(n+1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) = (\hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger)\psi_{+(n)}(x) \\ &= \hat{a}^\dagger\hat{H}\psi_{+(n)}(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= (E + n\hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= (E + n\hbar\omega + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= [E + (n+1)\hbar\omega]\psi_{+(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad (8.23) es válida para cualquier natural  $n$ .

Lo que hemos demostrado es que si  $\psi(x)$  es función propia de  $H$ , con valor propio  $E$ , entonces, dado cualquier natural  $n$ , las funciones  $(\hat{a})^n\psi(x)$

y  $(\hat{a}^\dagger)^n \psi(x)$  también son funciones propias, con valores propios  $E - n\hbar\omega$  y  $E + n\hbar\omega$ , respectivamente.

Ahora, note que para cualquier valor  $E$  existen un natural  $\tilde{n}$  tal que el valor propio  $\tilde{E}_{\tilde{n}} = E - \tilde{n}\hbar\omega$ , con función propia  $\psi_{-(\tilde{n})}(x) = (\hat{a})^{\tilde{n}} \psi(x)$ , satisface  $\tilde{E}_{-(\tilde{n})} = E - \tilde{n}\hbar\omega < 0$ . Esto implica que  $\psi_{\tilde{n}}(x) = 0$ . Es decir, si  $\psi(x)$  es una función propia de  $\hat{H}$  existe un natural  $\tilde{n}$  tal que  $(\hat{a})^{\tilde{n}} \psi(x) = 0$ . Note que en realidad existe un número infinito de posibles valores de  $\tilde{n}$ , pues si  $(\hat{a})^{\tilde{n}} \psi(x) = 0$ , entonces también se cumple  $(\hat{a})^{\tilde{n}+1} \psi(x) = 0$ .

Supongamos  $n'$  es el mínimo de los valores posibles de  $\tilde{n}$  tal que  $(\hat{a})^{\tilde{n}} \psi(x) = 0$  y definamos  $N = n' - 1$ . Entonces, la función  $\psi_0(x) = (\hat{a})^{n'-1} \psi(x) = (\hat{a})^N \psi(x)$  satisface  $\hat{a}\psi_0(x) = 0$ . Note que  $\psi_0(x) \neq 0$ , pues de lo contrario  $n'$  no sería el mínimo de los valores de  $\tilde{n}$ , note también el valor de la energía de  $\psi_0(x)$  es  $E_0 = E - N\hbar\omega$ . Esto muestra que existe una función,  $\psi_0(x)$ , tal que

$$\hat{a}\psi_0(x) = 0, \quad \psi_0(x) \neq 0 \quad (8.25)$$

a esta función le llamaremos estado base. Con el estado base se encuentra

$$\hat{H}\psi_0(x) = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_0(x) = \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x). \quad (8.26)$$

Por lo que  $E_0 = \hbar\omega/2$  es el valor propio de  $\psi_0(x)$ , pero este valor propio debe ser igual a  $E_0 = E - N\hbar\omega$ . De donde

$$E = E_N = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right). \quad (8.27)$$

Como  $\psi(x)$  es cualquier estado propio de  $H$ , los valores propio  $E$  son discretos.

Además, si definimos  $\psi_N(x) = (\hat{a}^\dagger)^N \psi_0(x)$  y consideramos (8.23), se llega a

$$\hat{H}\psi_N(x) = (E_0 + N\hbar\omega)\psi_N(x) = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \psi_N(x). \quad (8.28)$$

Así,  $\psi_N(x)$  tiene el mismo valor propio que  $\psi(x)$ , eso quiere decir que estas dos funciones deben ser proporcionales. Como  $\psi(x)$  y  $\psi_N(x)$  satisfacen la misma ecuación diferencial de segundo orden, con las mismas condiciones de borde, estas funciones deben ser iguales.

## 8.2. Estado Base y Ortonormalidad

Como cualquier solución de la ecuación de Schrodinger se puede expresar en términos del estado base, basta conocer esta función para obtener todas las soluciones. El estado base lo hemos definido como la función que satisface

$$\begin{aligned}\hat{a}\psi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(\hat{p} - im\omega\hat{x})\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - im\omega x\right)\psi_0(x) \\ &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right)\psi_0(x) = 0,\end{aligned}$$

es decir, el estado base debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x),$$

cuya solución es

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}, \quad A = \text{cte.}$$

Para determinar la constante  $A$  pediremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0(x)\psi_0(x) = 1,$$

que quiere decir que el estado base tiene norma unitaria. De esta condición tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0(x)\psi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(Ae^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}\right)^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = 1,$$

entonces

$$A = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}}}.$$

Ahora recordemos como calcular una integral de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = \text{cte.}$$

En este caso es más fácil calcular  $I^2$ , que es

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha x^2} e^{-\alpha y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)},\end{aligned}$$

ocupando coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\alpha r^2} = 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-\alpha r^2} = 2\pi \int_0^\infty dr \frac{(-1)}{2\alpha} \frac{d(e^{-\alpha r^2})}{dr} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha r^2} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

De donde

$$I = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

considerando este resultado encontramos

$$A = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}.$$

Así, el estado base normalizado es

$$\psi_0(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}. \quad (8.29)$$

Con esta función y  $a^\dagger$  podemos construir el resto de las funciones propias de  $\hat{H}$ , que tienen la forma

$$\psi_n(x) = A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x), \quad A_n = \text{constante}. \quad (8.30)$$

Donde,  $A_n$  es una constante de normalización. Antes de calcular explícitamente las funciones de onda  $\psi_n(x)$ , calcularemos la constante de normalización  $A_n$ , recordemos que las funciones  $\psi_n(x)$  deben tener norma unitaria, es decir,

$$\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle = 1. \quad (8.31)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \langle A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) | A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \psi_n \rangle \\ &= A_n^* A_n \langle (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) | (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \psi_n \rangle \\ &= A_n^* A_n \langle \psi_0(x) | a^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \rangle \\ &= A_n^* A_n \int_{-\infty}^\infty dx \psi_0(x) (\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Como  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , se tiene  $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n (\hat{a}^\dagger)^{n-1}$  y entonces

$$\begin{aligned}
(\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) &= (\hat{a})^{n-1} \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 = (\hat{a})^{n-1} (\hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n - (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\
&= (\hat{a})^{n-1} ([\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\
&= (\hat{a})^{n-1} (n (\hat{a}^\dagger)^{n-1} + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\
&= (\hat{a})^{n-1} (n (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \psi_0(x) + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} \psi_0(x)) \\
&= n (\hat{a})^{n-1} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \psi_0(x). \tag{8.33}
\end{aligned}$$

Este resultado lo podemos aplicar de forma reiterada  $k$  veces, donde  $k \leq n$ , por lo que

$$\begin{aligned}
(\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1)) (\hat{a})^{n-k} (\hat{a}^\dagger)^{n-k} \psi_0(x) \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} (\hat{a}^\dagger)^{n-k} \psi_0(x). \tag{8.34}
\end{aligned}$$

El máximo valor que puede tomar  $k$  es  $n$ , de donde

$$(\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) = n! \psi_0(x). \tag{8.35}$$

Introduciendo esta igualdad en (8.32), se obtiene

$$\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle = |A_n|^2 n! \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \psi_0(x) = 1, \tag{8.36}$$

así

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}. \tag{8.37}$$

Por lo tanto, las funciones de onda normalizadas son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x). \tag{8.38}$$

### 8.3. Polinomios de Hermite

Ahora veremos la forma explícita de las funciones  $\psi_n(x)$ , primero consideraremos que

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \\
a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (\hat{p} + im\omega\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + im\omega\hat{x} \right) \\
&= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m\omega}{\hbar} \hat{x} \right),
\end{aligned}$$

por lo que, ocupando el cambio de variable

$$\zeta^2 = \frac{m\omega x^2}{\hbar}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \frac{d}{d\zeta} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}, \quad (8.39)$$

se tiene

$$\psi_0(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\zeta^2}{2}}, \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \zeta\right).$$

Por lo tanto, introduciendo estos resultados en (8.38) se llega a

$$\psi_n(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} \left(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \zeta\right)^n e^{-\frac{\zeta^2}{2}}. \quad (8.40)$$

Note que

$$\begin{aligned} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \left( \frac{df}{d\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + f \frac{d(e^{-\frac{\zeta^2}{2}})}{d\zeta} \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \left( \frac{df}{d\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} - f\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left( \frac{df}{d\zeta} - f\zeta \right), \end{aligned}$$

es decir,

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) f. \quad (8.41)$$

En general se cumple

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^n f. \quad (8.42)$$

Probaremos esta afirmación por inducción. La base inductiva ya ha sido demostrada, falta demostrar el paso inductivo. Aquí debemos suponer que se cumple (8.42) y demostrar

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f. \quad (8.43)$$

Ocupando la hipótesis de inducción, se encuentra

$$\left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f = \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^n f = \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right),$$



así definiendo  $\tilde{f} = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right)$  y considerando (8.41) se obtiene

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f &= \left( \frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) \tilde{f} = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left( e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \tilde{f} \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left( e^{-\frac{\zeta^2}{2}} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d^n}{d\zeta^n} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \right) = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}} \left( f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar, esto implica que (8.42) es válida para cualquier número natural  $n$ . Introduciendo el resultado (8.42) en (8.40) se llega a

$$\begin{aligned} \psi_n(\zeta) &= \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \left( e^{-\frac{\zeta^2}{2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} e^{-\zeta^2}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Definiremos el polinomio de Hermite de grado  $n$  como

$$H_n(\zeta) = (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} e^{-\zeta^2}. \quad (8.45)$$

A esta expresión también se le llama fórmula de Rodriguez para los polinomios de Hermite. En particular se tiene

$$H_0(\zeta) = 1, \quad H_1(\zeta) = 2\zeta, \quad H_2(\zeta) = -2 + 4\zeta^2, \dots \quad (8.46)$$

Por lo tanto, la función de onda (8.44) se escribe como

$$\psi_n(\zeta) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta) \quad (8.47)$$

Debido a que las funciones de onda forman un conjunto ortonormal de funciones, ocupando el cambio de variable (8.39), tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{nl} &= \langle \psi_n(x) | \psi_l(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \psi_l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left( \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right) \psi_n^*(\zeta) \psi_l(\zeta) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} \frac{(i)^l}{\sqrt{l!2^l}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} H_n(\zeta) H_l(\zeta), \end{aligned}$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} H_n(\zeta) H_l(\zeta) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nl}. \quad (8.48)$$

Por lo tanto, los polinomios de Hermite, forman un conjunto de funciones ortonormales con función de peso  $e^{-\zeta^2}$ .

## 8.4. Función Generadora

Ahora veremos una función que está íntimamente relacionada con los polinomios de Hermite, la llamada función generadora. Primero recordemos que cualquier función,  $f(z)$ , bien comportada se puede expresar en su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \left( \frac{d^n f(z)}{dz^n} \Big|_{z=0} \right), \quad (8.49)$$

en particular

$$W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \left( \frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} \right). \quad (8.50)$$

Note que, como

$$2\zeta t - t^2 = -(t^2 - 2\zeta t + \zeta^2 - \zeta^2) = -((t - \zeta)^2 - \zeta^2) = -(t - \zeta)^2 + \zeta^2,$$

entonces

$$\frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n e^{2\zeta t - t^2}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n e^{\zeta^2 - (t - \zeta)^2}}{\partial t^n} = e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-(t - \zeta)^2}}{\partial t^n}. \quad (8.51)$$

Además, con el cambio de variable  $u = \zeta - t$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} = (-) \frac{\partial}{\partial u}, \quad u|_{t=0} = \zeta. \quad (8.52)$$

Por lo tanto, considerando (8.45) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} &= e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-(t - \zeta)^2}}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = e^{\zeta^2} (-)^n \frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n} \Big|_{u=\zeta} \\ &= e^{\zeta^2} (-)^n \frac{\partial^n e^{-\zeta^2}}{\partial \zeta^n} = (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-\zeta^2}}{\partial \zeta^n} = H_n(\zeta), \end{aligned} \quad (8.53)$$

sustituyendo este resultado en (8.50) se llega a

$$W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta), \quad (8.54)$$

que es la llamada función generadora de los polinomios de Hermite. Con esta función podemos obtener la forma explícita de las funciones  $H_n(\zeta)$ . Para esto

recordemos los resultado

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N C_k^N a^{N-k} b^k, \quad C_k^N = \frac{N!}{k!(N-k)!},$$

$$e^z = \sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} &= \sum_{N \geq 0} \frac{(2\zeta t - t^2)^N}{N!} = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N C_k^N (2\zeta t)^{N-k} (-t^2)^k \\ &= \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N C_k^N (2\zeta)^{N-k} (-)^k t^{2k+N-k} \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=0}^N \frac{(-)^k}{N!} C_k^N (2\zeta)^{N-k} t^{N+k}. \end{aligned}$$

Ahora, definamos  $n = N + k$ , entonces  $N = n - k$  y  $N - k = n - 2k$ . El máximo valor que puede tener  $k$  es  $N$ , es decir  $N - k = n - 2k \geq 0$ , que implica  $k \leq n/2$ . Así, si  $n$  es par, el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $n/2$ . Pero si  $n$  es impar,  $k$  no puede tomar el valor  $n/2$  porque éste no es un número natural. En este caso el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $(n-1)/2$ . Definiremos como  $\left[\frac{n}{2}\right]$  como el máximo entero menor o igual a  $n/2$ . Entonces, el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $\left[\frac{n}{2}\right]$ . Por lo tanto, si tomamos como variable de suma a  $n$  en lugar de  $N$ , se tiene

$$\begin{aligned} W(\zeta, t) &= e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^k}{(n-k)!} C_k^{n-k} (2\zeta)^{n-k-k} t^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!} C_k^{n-k} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!} \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta). \end{aligned} \tag{8.55}$$

Entonces,

$$H_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k}. \quad (8.56)$$

Con la función generatriz se pueden probar varias propiedades de los polinomios de Hermite, por ejemplo, note que

$$W(-\zeta, t) = e^{2(-\zeta)t-t^2} = e^{2\zeta(-t)-(-t)^2} = W(\zeta, -t). \quad (8.57)$$

Considerando (8.54) se tiene

$$W(-\zeta, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(-\zeta) = W(\zeta, -t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} H_n(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (-)^n H_n(\zeta),$$

igualdando término a término se encuentra

$$H_n(-\zeta) = (-)^n H_n(\zeta). \quad (8.58)$$

Por lo tanto, los polinomios de Hermite, son pares o impares dependiendo de su grado  $n$ . En particular  $H_{2n+1}(-0) = (-)^{2n+1} H_{2n+1}(0)$ , es decir

$$H_{2n+1}(0) = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} W(\zeta = 0, t) &= e^{-t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n t^{2n}}{n!} \\ W(\zeta = 0, t) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(0) = \sum_{n \geq 0} \frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} t^{2n}. \end{aligned}$$

Igualando término a término estas dos expresiones se llega a

$$H_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

También se tiene el resultado

$$\frac{\partial W(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{\partial e^{2\zeta t - t^2}}{\partial \zeta} = 2te^{2\zeta t - t^2} = 2tW(\zeta, t). \quad (8.59)$$

Considerando (8.54) y que  $H_0(\zeta) = 1$  se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\zeta, t)}{\partial \zeta} &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta}, \\
2tW(\zeta, t) &= 2t \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{2t^{n+1}}{n!} H_n(\zeta) = \sum_{n \geq 1} \frac{2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(\zeta) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} 2n H_{n-1}(\zeta).
\end{aligned} \tag{8.60}$$

De donde,

$$\frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = 2n H_{n-1}(\zeta). \tag{8.61}$$

#### 8.4.1. Ecuación de Hermite

De la fórmula de Rodríguez para los polinomios de Hermite (8.45) se tiene

$$\begin{aligned}
H_n(\zeta) &= (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n e^{-\zeta^2}}{d\zeta^n} = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d^{n-1} e^{-\zeta^2}}{d\zeta^{n-1}} \right) \\
&= (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left[ e^{-\zeta^2} \left( (-1)^{n-1} e^{\zeta^2} \frac{d^{n-1} e^{-\zeta^2}}{d\zeta^{n-1}} \right) \right] \\
&= (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left( e^{-\zeta^2} H_{n-1}(\zeta) \right) \\
&= (-1)^n e^{\zeta^2} \left( -2\zeta e^{-\zeta^2} H_{n-1}(\zeta) + e^{-\zeta^2} \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} \right) \\
&= 2\zeta H_{n-1}(\zeta) - \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$H_n(\zeta) = 2\zeta H_{n-1}(\zeta) - \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}. \tag{8.62}$$

Derivando esta igualdad con respecto a  $\zeta$ , se tiene

$$\frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = 2H_{n-1}(\zeta) + 2\zeta \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2 H_{n-1}(\zeta)}{d\zeta^2}. \tag{8.63}$$

Considerando (8.61) se encuentra

$$2n H_{n-1}(\zeta) = 2H_{n-1}(\zeta) + 2\zeta \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2 H_{n-1}(\zeta)}{d\zeta^2} \tag{8.64}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2 H_n(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} + 2nH_n(\zeta) = 0, \quad (8.65)$$

que es la llamada ecuación de Hermite.

## 8.5. Método tradicional

Ahora ahora ocuparemos el método tradicional para resolver la ecuación de onda del oscilador armónico

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (8.66)$$

Con el cambio de variable (8.39) la ecuación (8.66) toma la forma

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) \psi(\zeta) = \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(\zeta). \quad (8.67)$$

Note que en el límite  $\zeta \rightarrow \infty$  se tiene la ecuación asintótica

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) \psi(\zeta) \approx 0. \quad (8.68)$$

Proponemos como solución asintótica a la función  $\psi(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ , que satisface

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\zeta} &= -\zeta\psi(\zeta), \\ \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} &= -\frac{d}{d\zeta} (\zeta\psi(\zeta)) = -(\psi(\zeta) - \zeta^2\psi(\zeta)) \approx -\zeta^2\psi(\zeta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $\zeta \gg 1$  se tiene

$$\left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta^2 \right) \psi(\zeta) \approx 0. \quad (8.69)$$

Así, cuando  $\zeta \rightarrow \infty$  las soluciones de (8.67) deben ser de la forma  $\psi(\zeta) \approx e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ , para el caso general, propondremos como solución

$$\psi(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \phi(\zeta), \quad (8.70)$$

con  $\phi(\zeta)$  una función que crece menos rápido que  $e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$  cuando  $\zeta \rightarrow \infty$ . Para esta propuesta se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} &= e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left( -\zeta\phi(\zeta) + \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} \right), \\ \frac{d^2\psi(\zeta)}{d\zeta^2} &= e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left( \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + (\zeta^2 - 1)\phi(\zeta) \right).\end{aligned}\quad (8.71)$$

Sustituyendo (8.71) en (8.67) se encuentra

$$\begin{aligned}& e^{-\frac{\zeta^2}{2}}(-) \left( \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + (\zeta^2 - 1)\phi(\zeta) \right) + e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\zeta^2\psi(\zeta) \\ &= \frac{2E}{\hbar\omega}e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\zeta^2\phi(\zeta).\end{aligned}$$

De donde

$$-\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} + 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \phi(\zeta) = \frac{2E}{\hbar\omega}\phi(\zeta), \quad (8.72)$$

es decir

$$\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi(\zeta) = 0. \quad (8.73)$$

Para resolver esta ecuación propondremos la solución en serie de potencia

$$\phi(\zeta) = \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n, \quad (8.74)$$

de la cual se encuentra

$$\begin{aligned}\left( \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi(\zeta) &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) a_n \zeta^n, \\ -2\zeta \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} &= -2\zeta \sum_{n \geq 0} n a_n \zeta^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (-2n) a_n \zeta^n, \\ \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} &= \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n \zeta^{n-2} = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n \zeta^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} \zeta^n.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) \phi(\zeta) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \left[ \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) - 2n \right] a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) \zeta^n = 0. \end{aligned}$$

De donde

$$a_{n+2} = \frac{(2n - (\frac{2E}{\hbar\omega} - 1)) a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad (8.75)$$

es decir

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(2n - (\frac{2E}{\hbar\omega} - 1))}{(n+2)(n+1)}. \quad (8.76)$$

Note que esta relación de recurrencia separa los términos pares e impares, por lo que se tendrán series de la forma  $\sum_{n \geq 0} a_{2n} \zeta^{2n}$  y  $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} \zeta^{2n+1}$ . Para el caso par, si  $n \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\frac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}} \rightarrow \frac{4n}{(2n+2)(2n+1)} \approx \frac{1}{n}, \quad (8.77)$$

que es el mismo comportamiento que tiene los coeficientes de Taylor de la serie

$$e^{\zeta^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{\zeta^{2n}}{n!}. \quad (8.78)$$

Por lo tanto, esta solución,  $\phi(\zeta)$ , tiene el mismo comportamiento asintótico que  $e^{\frac{\zeta^2}{2}}$ . Para el caso impar, la serie tiene el mismo comportamiento asintótico que  $\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}$ . Esto no debe ocurrir pues  $\phi(\zeta)$  debe estar dominada por  $e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ . El problema se resuelve si  $\phi(\zeta)$  no es una serie, sino un polinomio. Esto ocurre si después de cierto número todos los términos de la serie son cero, es decir  $a_{n+2}/a_n = 0$ . Lo que implica

$$2n - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 0, \quad (8.79)$$

de donde,

$$E = E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (8.80)$$



Entonces la energía se discretiza y la funciones  $\phi(\zeta)$  son polinomios. Sustituyendo  $E_n$  en (8.73) se obtiene

$$\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + 2n\phi(\zeta) = 0, \quad (8.81)$$

que es la ecuación de Hermite (8.65). Por lo tanto, las funciones  $\phi(\zeta)$  son los polinomios de Hermite.

Así, las soluciones de la ecuación de onda para el oscilador armónico son de la forma

$$\psi_n(\zeta) = A_n e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta), \quad (8.82)$$

con  $H_n(\zeta)$  el polinomio de Hermite de grado  $n$ .

## 8.6. Oscilador en campo eléctrico constante

El operador Hamiltoniano para un oscilador en un campo magnético constante,  $\mathcal{E}$ , es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - q\mathcal{E}x, \quad (8.83)$$

note que este operador se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left( x^2 - \frac{2q\mathcal{E}}{m\omega^2} x \right), \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left( x^2 - 2 \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} x + \left( \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 - \left( \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left( x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \end{aligned} \quad (8.84)$$

Por lo que, con el cambio de variable  $\eta = x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$  se tiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \eta^2 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \quad (8.85)$$

Por lo que la ecuación de valores propios

$$\hat{H}\psi(x) = \left( \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - q\mathcal{E}x \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (8.86)$$

se puede escribir como

$$\hat{H}\psi(\eta) = \left( \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\eta^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \right) \psi(\eta) = E\psi(\eta), \quad (8.87)$$

de donde

$$\left( \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\eta^2 \right) \psi(\eta) = \left( E + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \right) \psi(\eta). \quad (8.88)$$

Esta última ecuación es la ecuación del oscilador armónico, por lo que

$$E + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (8.89)$$

es decir los únicos valores de la energía permitidos son

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \quad (8.90)$$

mientras que las funciones de onda son

$$\psi_n(\zeta) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta), \quad \zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right). \quad (8.91)$$

## 8.7. Suma de osciladores y el oscilador en $D$ dimensiones

Supongamos que tenemos un sistema que consiste en dos osciladores des-  
acoplados. En este caso el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}x_1^2 + \frac{m_2\omega_2^2}{2}x_2^2, \quad (8.92)$$

con

$$p_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Como los osciladores son independientes, estos operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad [x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2. \quad (8.93)$$

Para obtener los valores y funciones propias de  $H$  definamos los Hamiltonianos

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}x_1^2, \quad H_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\omega_2^2}{2}x_2^2.$$

También definamos los operadores

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m_1\omega_1\hbar}}(p_1 - im_1\omega_1x_1), & a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m_2\omega_2\hbar}}(p_2 - im_2\omega_2x_2) \\ a_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m_1\omega_1\hbar}}(p_1 + im_1\omega_1x_1), & a_2^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m_2\omega_2\hbar}}(p_2 + im_2\omega_2x_2), \end{aligned}$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[a_1, a_1^\dagger] = 1, \quad [a_2, a_2^\dagger] = 1$$

y cero en cualquier otro caso. También tenemos que

$$H_1 = \hbar\omega_1 \left( a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right), \quad H_2 = \hbar\omega_2 \left( a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right).$$

Por lo que, el Hamiltoniano (8.92) es

$$H = H_1 + H_2 = \hbar\omega_1 \left( a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right). \quad (8.94)$$

Ahora, recordemos que para los Hamiltonianos  $H_1$  y  $H_2$  se tiene

$$\begin{aligned} H_k \psi_{n_k}(x_k) &= E_{n_k} \psi_{n_k}(x_k), & E_{n_k} &= \hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right), & k &= 1, 2, \\ \psi_{n_k}(x_k) &= \psi_{n_k}(\zeta_k) = \left( \frac{m_k\omega_k}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^{n_k}}{\sqrt{n_k!2^{n_k}}} e^{-\frac{\zeta_k^2}{2}} H_{n_k}(\zeta_k), \\ \zeta_k &= \sqrt{\frac{m_k\omega_k}{\hbar}} x_k, \\ \langle \psi_{n_k} | \psi_{l_k} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \psi_{n_k}^*(x_k) \psi_{l_k}(x_k) = \delta_{n_k l_k}. \end{aligned}$$

Entonces, definiremos

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2), \quad (8.95)$$

esta función satisface

$$\begin{aligned}
H\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) &= (H_1 + H_2) \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \\
&= H_1 \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) + H_2 \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \\
&= \psi_{n_2}(x_2) H_1 \psi_{n_1}(x_1) + \psi_{n_1}(x_1) H_2 \psi_{n_2}(x_2) \\
&= E_{n_1} \psi_{n_2}(x_2) \psi_{n_1}(x_1) + E_{n_2} \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \\
&= (E_{n_1} + E_{n_2}) \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \\
&= \left( \hbar\omega_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \right) \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Por lo que, las funciones propias de  $H$  son (8.95) y sus valores propios son

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\omega_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (8.96)$$

La funciones propias (8.95) son ortonormales, pues

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{n_1 n_2} | \psi_{l_1 l_2} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2))^* \psi_{l_1}(x_1) \psi_{l_2}(x_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \psi_{n_1}(x_1)^* \psi_{l_1}(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \psi_{n_2}(x_2)^* \psi_{l_2}(x_2) \\
&= \delta_{n_1 l_1} \delta_{n_2 l_2}.
\end{aligned} \quad (8.97)$$

### 8.7.1. Cadena de osciladores

El resultado anterior se puede generalizar para un número  $N$  de osciladores desacoplados. En efecto, consideremos el Hamiltoniano

$$H = \sum_{k=1}^N \left( \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} x_k^2 \right), \quad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (8.98)$$

Como los osciladores son independientes, estos operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad [x_k, p_l] = i\hbar \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, N. \quad (8.99)$$

Para obtener los valores y funciones propias de  $H$  definamos los Hamiltonianos

$$H_k = \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} x_k^2$$

y los operadores

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2m_k\omega_k\hbar}}(p_k - im_k\omega_k x_k), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m_k\omega_k\hbar}}(p_k + im_k\omega_k x_k),$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (8.100)$$

y cero en cualquier otro caso. También tenemos que

$$H_k = \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right),$$

por lo que, el Hamiltoniano (8.102) es

$$H = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (8.101)$$

Ahora, recordando de nuevo que para cada  $H_k$  se tiene

$$\begin{aligned} H_k \psi_{n_k}(x_k) &= E_{n_k} \psi_{n_k}(x_k), \quad E_{n_k} = \hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \psi_{n_k}(x_k) &= \psi_{n_k}(\zeta_k) = \left( \frac{m_k\omega_k}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^{n_k}}{\sqrt{n_k!2^{n_k}}} e^{-\frac{\zeta_k^2}{2}} H_{n_k}(\zeta_k), \\ \zeta_k &= \sqrt{\frac{m_k\omega_k}{\hbar}} x_k, \\ \langle \psi_{n_k} | \psi_{l_k} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \psi_{n_k}^*(x_k) \psi_{l_k}(x_k) = \delta_{n_k l_k}, \end{aligned}$$

definiremos

$$\psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \dots \psi_{n_N}(x_N). \quad (8.102)$$

Estas funciones satisfacen las relaciones de ortonormalidad

$$\langle \psi_{n_1 n_2 \dots n_N} | \psi_{l_1 l_2 \dots l_N} \rangle = \delta_{n_1 l_1} \delta_{n_2 l_2} \dots \delta_{n_N l_N}. \quad (8.103)$$

También cumplen que

$$H \psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = E_{n_1 n_2 \dots n_N} \psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

con

$$E_{n_1 n_2 \dots n_N} = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right) \quad (8.104)$$

### 8.7.2. Oscilador en $D$ dimensiones

El Hamiltoniano de un oscilador en  $D$  dimensiones es

$$H = \sum_{k=1}^D \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_k^2 \right), \quad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (8.105)$$

Matematicamente este es un caso del problema anterior, por lo que los valores propios son

$$E_{n_1 n_2 \dots n_D} = \sum_{k=1}^D \hbar\omega \left( n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (8.106)$$

Para este sistema las funciones propias son un caso particular de (8.102).

En particular para tres dimensiones se tiene

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega \left( n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right), \quad (8.107)$$

con las funciones de onda

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \frac{(i)^{n_1+n_2+n_3}}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! 2^{n_1+n_2+n_3}}} \\ e^{-\frac{m\omega(x^2+y^2+z^2)}{2\hbar}} H_{n_1} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_{n_2} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) H_{n_3} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z \right).$$

## Capítulo 9

# El Grupo de rotaciones y los Armónicos Esféricos

### 9.1. Transformaciones de coordenadas lineales

Sea  $f$  una función de la variable  $x$ , con el cambio de variable

$$x' = \alpha x, \quad \text{con} \quad \alpha = \text{cte}, \quad (9.1)$$

se encuentra

$$\frac{df}{dx'} = \frac{dx}{dx'} \frac{df}{dx} = \frac{1}{\alpha} \frac{df}{dx}. \quad (9.2)$$

Entonces, si la variable  $x$  transforma con  $\alpha$ , el operador derivada transforma con  $1/\alpha$ , es decir,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \alpha x, \\ \frac{d}{dx} &\rightarrow \frac{d}{dx'} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Veamos ahora que pasa en dos dimensiones. Consideremos la matriz de  $2 \times 2$  con entradas constantes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

cuya inversa es

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad |\Lambda| = a_1 a_4 - a_2 a_3. \quad (9.5)$$

También definamos los vectores columna

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Entonces, podemos hacer una transformación lineal de coordenadas de la forma  $X' = \Lambda X$ , es decir

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

La cual tiene la transformación inversa,  $X = \Lambda^{-1} X'$ ,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

es decir,

$$x^1 = \frac{a_4 x'^1 - a_2 x'^2}{|\Lambda|}, \quad (9.9)$$

$$x^2 = \frac{-a_3 x'^1 + a_1 x'^2}{|\Lambda|}. \quad (9.10)$$

Además, por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^1} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

De la regla de transformación (9.10), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^1} &= \frac{1}{|\Lambda|} \left( a_4 \frac{\partial}{\partial x^1} - a_3 \frac{\partial}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} &= \frac{1}{|\Lambda|} \left( -a_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (9.12)$$

que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

De esta ecuación podemos ver que la matriz involucrada en la transformación de las derivadas parciales es la transpuesta de la matriz inversa de  $\Lambda$ , es decir  $(\Lambda^{-1})^T$ . Otra forma de escribir esta ecuación es

$$\nabla' = (\Lambda^{-1})^T \nabla, \quad (9.14)$$



por lo que

$$\nabla = (\Lambda)^T \nabla'. \quad (9.15)$$

Este resultado se puede generalizar a más dimensiones. En efecto, en general una transformación de coordenadas se escribe como

$$x'^i = \Lambda_{ij} x^j, \quad x^i = (\Lambda^{-1})_{ij} x'^j. \quad (9.16)$$

De donde, por la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial (\Lambda^{-1})_{jk} x'^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\Lambda^{-1})_{jk} \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\Lambda^{-1})_{jk} \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= (\Lambda^{-1})_{ji} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left( (\Lambda^{-1})^T \right)_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Por lo tanto, para cualquier dimensión se cumple

$$\nabla' = (\Lambda^{-1})^T \nabla. \quad (9.18)$$

Esta ley de transformación será de gran utilidad para obtener las simetrías de la ecuación de Laplace.

## 9.2. Laplaciano y elemento de línea

Supongamos que la matriz  $\tilde{\eta}$ , de  $n \times n$ , satisface

$$\tilde{\eta} \tilde{\eta} = I, \quad (9.19)$$

con  $I$  la matriz identidad de  $n \times n$ . Entonces, podemos definir un el elemento de línea como

$$ds^2 = dX^T \tilde{\eta} dX, \quad dX = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

A la matriz  $\tilde{\eta}$  se le llama métrica, en dos dimensiones un ejemplo de estas matrices son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Con la matriz  $\tilde{\eta}$  el "Laplaciano" se define como

$$\nabla^2 = \nabla^T \tilde{\eta} \nabla. \quad (9.22)$$

Notablemente, elemento de línea está intimamente relacionado con el Laplaciano, en particular tienen las mismas simetrías. Esta relación es importante y se da también para espacios no euclidianos. Veamos como se da esta relación.

Bajo una transformación lineal de coordenadas se tiene

$$ds'^2 = dX'^T \tilde{\eta} dX' = (\Lambda dX)^T \tilde{\eta} \Lambda dX = dX^T (\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda) dX. \quad (9.23)$$

Las transformaciones,  $\Lambda$ , que dejan invariante al elemento de línea deben cumplir,  $ds^2 = ds'^2$ . Igualando (9.20) con (9.23) se tiene la condición

$$\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda = \tilde{\eta}. \quad (9.24)$$

Además, considerando que bajo una transformación lineal de coordenadas el gradiente transforma como (9.18), se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla'^2 &= \nabla'^T \tilde{\eta} \nabla' = \left( (\Lambda^{-1})^T \nabla \right)^T \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \nabla = \nabla^T \left( \left( (\Lambda^{-1})^T \right)^T \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right) \nabla \\ &= \nabla^T \left( \Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right) \nabla. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Las transformaciones que dejan invariante el Laplaciano deben cumplir  $\nabla'^2 = \nabla'^2$ , entonces igualando (9.22) con (9.25) se tiene la condición

$$\Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T = \tilde{\eta}. \quad (9.26)$$

Como  $(\tilde{\eta})^{-1} = \tilde{\eta}$ , la condición (9.26) tiene la forma

$$\tilde{\eta} = (\tilde{\eta})^{-1} = \left( \Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right)^{-1} = \left( (\Lambda^{-1})^T \right)^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda, \quad (9.27)$$

que coincide con (9.24). Por lo tanto, las transformaciones lineales,  $\Lambda$ , que dejan invariante al elemento de línea (9.20) también dejan invariante al Laplaciano (9.22), claramente la afirmación inversa también es correcta.

### 9.3. Grupo de Transformaciones

Antes de continuar recordemos lo que es un grupo. Sea  $G$  un conjunto con una operación  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ . El par  $(G, \cdot)$  es un grupo si cumple

1) Axioma de cerradura:

$$g_1 \in G, g_2 \in G \implies g_1 \cdot g_2 \in G \quad (9.28)$$

2) Axioma de asociatividad:

$$g_1 \in G, g_2 \in G, g_3 \in G, \implies g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3. \quad (9.29)$$

3) Axioma del neutro:

$$\exists e \in G, \quad g_1 \in G \implies g_1 \cdot e = e \cdot g_1 = g_1. \quad (9.30)$$

4) Axioma del inverso:

$$\forall g_1 \in G, \exists g_1^{-1} \in G, \quad g_1 \cdot g_1^{-1} = g_1^{-1} \cdot g_1 = e. \quad (9.31)$$

Definamos como  $T$  al conjunto de transformaciones  $\Lambda$  que dejan invariante al Laplaciano. Estas transformaciones cumplen

$$\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda = \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta}^2 = I. \quad (9.32)$$

Probaremos que  $T$  es un grupo.

Supongamos que  $\Lambda_1 \in T$  y  $\Lambda_2 \in T$ , entonces cumplen

$$\Lambda_1^T \tilde{\eta} \Lambda_1 = \tilde{\eta}, \quad \Lambda_2^T \tilde{\eta} \Lambda_2 = \tilde{\eta}. \quad (9.33)$$

De donde

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \tilde{\eta} (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \tilde{\eta} \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \tilde{\eta} \Lambda_2 = \tilde{\eta}. \quad (9.34)$$

Esto implica  $\Lambda_1 \Lambda_2 \in T$ , es decir

$$\Lambda_1 \in T, \Lambda_2 \in T \implies \Lambda_1 \Lambda_2 \in T. \quad (9.35)$$

Por lo tanto, se cumple el axioma la cerradura.

El producto de matrices es asociativo, en particular la matrices que satisfacen (9.32). Además, la identidad  $I$  satisface (9.32), es decir,  $I \in T$ . Así se cumplen el axioma de la asociatividad y el del elemento neutro.

Ahora, como  $\tilde{\eta}^2 = I$ , si  $\Lambda$  está en  $T$  entonces se cumple  $\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta} = I$ . De donde,

$$\tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta} = (\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T. \quad (9.36)$$

Por lo tanto,

$$(\Lambda^{-1})^T \tilde{\eta} \Lambda^{-1} = (\tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta}) \tilde{\eta} \Lambda^{-1} = \tilde{\eta} \Lambda \Lambda^{-1} = \tilde{\eta}. \quad (9.37)$$

Así,  $\Lambda$  está en  $T$ , también  $\Lambda^{-1}$  está en  $T$ . Esto nos indica que se cumple el axioma del inverso.

En consecuencia el conjunto de matrices que satisface (9.32) es un grupo. Es decir, el conjunto de transformaciones que dejan invariante al elemento de línea (9.20) forma un grupo, que es el mismo grupo que deja invariante al Laplaciano (9.22).

## 9.4. El grupo de rotaciones

Sea  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un vector en  $\mathbf{R}^n$  y definamos la forma cuadrática  $l^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ .  $l^2$  representa la distancia de  $\vec{x}$  al origen. Note que si definimos la matriz columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

y la matriz renglón

$$X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n), \quad (9.39)$$

la distancia se puede escribir como

$$l^2 = X^T X = X^T I X. \quad (9.40)$$

Ahora, si  $\Lambda$  es una matriz de  $n \times n$  y se hace la transformación de coordenadas

$$X' = \Lambda X, \quad (9.41)$$

se tiene la distancia

$$l'^2 = X'^T I X' = X^T (\Lambda^T I \Lambda) X. \quad (9.42)$$

Si  $\Lambda$  es tal que deja la distancia invariante, es decir que  $l^2 = l'^2$ , debe cumplir

$$\Lambda^T I \Lambda = I. \quad (9.43)$$

Otra forma de expresar esta igualdad es  $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$ . Claramente las matrices que cumplen (9.43) forman un grupo, a este grupo de matrices se le llama  $O(n)$ .

Ahora, para cualquier matriz  $A$  se cumple que  $\det A = \det A^T$ . Entonces, las matrices que satisfacen (9.43) deben cumplir  $(\det \Lambda)^2 = 1$ , es decir  $\det \Lambda = \pm 1$ . El subconjunto de matrices  $\Lambda$  que cumple  $\det \Lambda = -1$  no forman un grupo, por ejemplo, la identidad no está en ese subconjunto. Sin embargo, las matrices  $\Lambda$  que cumple  $\det \Lambda = 1$  sí forman un grupo, este es el grupo  $SO(n)$ .

Note que la matriz de  $n \times n$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad (9.44)$$

se pueden formar con los vectores columna

$$\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} \\ \Lambda_{21} \\ \vdots \\ \Lambda_{n1} \end{pmatrix}, \vec{C}_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_{12} \\ \Lambda_{22} \\ \vdots \\ \Lambda_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{C}_n = \begin{pmatrix} \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{2n} \\ \vdots \\ \Lambda_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.45)$$

Claramente, para la matriz traspuesta,  $\Lambda^T$ , estos vectores representan los renglones. Por lo tanto, la condición (9.43) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Lambda^T \Lambda &= \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \cdots & \Lambda_{n1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{1n} & \Lambda_{2n} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_n \\ \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{C}_n \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_n \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \cdot \vec{C}_n \end{pmatrix} = I. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Otra forma de expresar esta igualdad es

$$\vec{C}_i \cdot \vec{C}_j = \delta_{ij}, \quad (9.47)$$

es decir, si una matriz satisface (9.43), tiene sus columnas ortonormales. Ahora, si  $\Lambda$  satisface (9.43),  $\Lambda^{-1}$  también la satisface. Por lo tanto,  $\Lambda^{-1}$  tiene sus

columnas ortonormales entre si. Pero  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ , entonces, las columnas de  $\Lambda^T$  son ortonormales entre si. Considerando que las columnas de  $\Lambda^T$  son los renglones de  $\Lambda$ , podemos ver que los renglones de  $\Lambda$  son ortonormales entre si. En conclusión, si  $\Lambda$  satisface (9.43) sus columnas y renglones son ortonormales entre si.

Una matriz de  $n \times n$  tiene  $n^2$  parámetros libres, pero si satisface (9.46) no todos sus parámetros son libres. De (9.46) se puede ver que  $\Lambda^T \Lambda$  es una matriz simétrica, por lo que (9.46) sólo tiene  $\frac{n(n+1)}{2}$  ecuaciones independientes. Así, los parámetros libres de una matriz que satisface (9.46) son  $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Para el caso  $n = 3$  hay tres parámetros libres, para esta dimensión cualquier matriz se puede escribir como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (9.48)$$

Si satisface (9.46), debe cumplir

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad (9.49)$$

esto nos dice que la punta de los vectores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  están en una esfera y que son ortonormales entre si. Un ejemplo de estas matrices son

$$\Lambda_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (9.50)$$

$$\Lambda_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

$$\Lambda_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

La matriz  $\Lambda_x(\theta)$  representa una rotación sobre el eje  $x$ ,  $\Lambda_y(\psi)$  representa una rotación sobre el eje  $y$ , mientras que  $\Lambda_z(\phi)$  representa una rotación sobre el eje  $z$ . Por lo tanto, las rotaciones dejan invariante la distancia y al Laplaciano. Note que estas matrices son linealmente independientes.

Existen otras formas de reparametrizar una matriz de rotación, por ejemplo la base unitaria en coordenadas esféricas (2.25)-(2.26) satisfacen la condición

(9.49), pero no son la solución más general, pues solo dependen de dos parámetros y la solución general de (9.49) depende de tres. Pero estos vectores nos sirven para obtener la solución general. Propondremos a  $\vec{c}$  como

$$\vec{c} = (\sin \psi \sin \theta, \cos \psi \sin \theta, \cos \theta). \quad (9.53)$$

Los vectores  $\vec{b}$  y  $\vec{a}$  deben ser tales que si  $\phi = 0$  se cumple

$$\vec{b}|_{\phi=0} = \hat{e}_\theta = (\sin \psi \cos \theta, \cos \psi \cos \theta, -\sin \theta), \quad (9.54)$$

$$\vec{c}|_{\phi=0} = \hat{e}_\psi = (\cos \psi, -\sin \psi, 0). \quad (9.55)$$

Un par de vectores que satisfacen estas condiciones son:

$$\vec{a} = (\sin \phi \sin \psi \cos \theta + \cos \phi \cos \psi, -\sin \phi \cos \psi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi, \sin \phi \sin \theta),$$

$$\vec{b} = (\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta, -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta, -\cos \phi \sin \theta).$$

Se puede probar que los vectores  $\vec{a}, \vec{b}$  y  $\vec{c}$  cumplen (9.49). Así  $\Lambda$  se puede escribir como

$$\Lambda(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi s\psi c\theta & s\phi c\psi + c\phi s\psi c\theta & s\psi s\theta \\ -c\phi s\psi - s\phi c\psi c\theta & -s\phi s\psi + c\phi c\psi c\theta & c\psi s\theta \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{pmatrix}. \quad (9.56)$$

Claramente aún hay cierta arbitrariedad, pues podemos cambiar el lugar de los vectores  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , también podemos cambiar renglones por columnas y seguirá cumpliendo (9.43). La ventaja de escribir  $\Lambda$  así es que se puede expresar como el producto tres matrices

$$\Lambda(\phi, \theta, \psi) = \Lambda_1(\phi)\Lambda_2(\theta)\Lambda_3(\psi), \quad (9.57)$$

con

$$\Lambda_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.58)$$

$$\Lambda_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (9.59)$$

$$\Lambda_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.60)$$

Esta descomposición es muy útil para el estudio de movimiento del cuerpo rígido. A los parámetros  $\theta, \psi, \phi$  se les llama ángulos de Euler.

Las rotaciones no son la únicas transformaciones de  $O(3)$ . Por ejemplo, las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.61)$$

cumplen (9.49) pero no son de rotación. Las rotaciones representan las transformaciones de  $O(n)$  que se pueden conectar con la matriz unidad  $I$ . Pues al hacer  $\phi = 0, \theta = 0, \psi = 0$  se obtiene la unidad  $I$ .

### 9.4.1. Transformaciones infinitesimales

Un conjunto particularmente importante de las transformaciones de  $O(n)$  son las que están infinitesimalmente cercanas a la unidad, que son de la forma

$$\Lambda \approx I + \epsilon M, \quad \epsilon \ll 1. \quad (9.62)$$

Para este tipo de transformaciones la condición (9.43) implica

$$I = \Lambda^T \Lambda \approx (I + \epsilon M)^T (I + \epsilon M) \quad (9.63)$$

$$= (I + \epsilon M^T) (I + \epsilon M) \approx I + \epsilon (M^T + M). \quad (9.64)$$

Por lo tanto,

$$M = -M^T, \quad (9.65)$$

es decir,  $M$  debe ser antisimétrica. Note que una matriz antisimétrica de  $n \times n$  sólo puede tener  $\frac{n(n-1)}{2}$  parámetros libres, que coincide con los parámetros libres del grupo  $SO(n)$ . Para el caso particular  $n = 3$ , cualquier matriz antisimétrica se puede escribir como

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Definamos los vectores  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\delta\vec{\alpha} = \epsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , entonces

$$\begin{aligned} \delta X &= \epsilon M X = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \alpha_2 z - \alpha_3 y \\ \alpha_3 x - \alpha_1 z \\ \alpha_1 x - \alpha_2 y \end{pmatrix} \\ &= \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (9.67)$$



Por lo tanto, una rotación infinitesimal está dada por

$$X' = \Lambda X \approx (I + \epsilon M) X = (IX + \epsilon MX), \quad (9.68)$$

es decir

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{\alpha} \times \vec{r}. \quad (9.69)$$

Estas rotaciones son importantes porque definen al resto de las transformaciones, para ver esto primero notemos que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 = \vec{\alpha} \cdot \vec{m}, \quad (9.70)$$

con

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que la matriz (9.70) no se modifica si hacemos el cambio  $\vec{\alpha} \rightarrow -i\vec{\alpha}$  y  $\vec{m} \rightarrow i\vec{m} = \vec{M}$ . Es decir

$$M_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ventaja de ocupar las matrices  $M_i$  es que son Hermíticas, es decir,  $M_i^\dagger = M_i$ . Esto implica que sus valores propios son reales, por lo tanto la cantidad  $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$  puede representar cantidades físicas.

Una transformación finita se debe hacer como producto infinito de transformaciones infinitesimales. Por ejemplo, ocupando

$$X' \approx (\Lambda(\vec{\alpha}/N))^N X = (I - i\delta \vec{\alpha} \cdot \vec{M})^N X = \left( I - i\frac{1}{N} \vec{\alpha} \cdot \vec{M} \right)^N X \quad (9.71)$$

y considerando el resultado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( I + \frac{\beta x}{N} \right)^N = e^{\beta x}, \quad (9.72)$$

se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( I - i\frac{1}{N} \vec{\alpha} \cdot \vec{M} \right)^N = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}}. \quad (9.73)$$

Por lo tanto, una transformación finita está dada por

$$X' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}} X. \quad (9.74)$$

Así, cualquier transformación infinitesimal conectada con la identidad tiene la forma

$$\Lambda(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}}. \quad (9.75)$$

En este sentido se dice que  $M_1, M_2, M_3$  son los generadores del grupo  $SO(3)$ .

Ahora veamos de forma explícita la expresión de algunos caso de (9.75). Primero notemos que si  $n \geq 1$ , se tiene

$$M_1^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_1, \quad M_1^{2n+1} = M_1, \quad (9.76)$$

$$M_2^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2, \quad M_2^{2n+1} = M_2, \quad (9.77)$$

$$M_3^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_3, \quad M_3^{2n+1} = M_3. \quad (9.78)$$

Entonces, considerando estos resultados, juntos con las series de  $\cos \beta$  y  $\sin \beta$ , se tiene

$$\begin{aligned} e^{-i\beta M_i} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-i\beta M_i)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} (-i\beta)^{2n} (M_i)^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} (-i\beta)^{2n+1} (M_i)^{2n+1} \\ &= I + T_i \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} (-i\beta)^{2n} + M_i \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} (-i\beta)^{2n+1} \\ &= I - T_i + T_i + T_i \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^{2n} - iM_i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \\ &= I - T_i + T_i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{(2n)!} - iM_i \sin \beta \\ &= I - T_i + T_i \cos \beta - iM_i \sin \beta. \end{aligned} \quad (9.79)$$

De donde,

$$\begin{aligned}
e^{-i\alpha_1 M_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, & e^{-i\alpha_2 M_2} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \\
e^{-i\alpha_3 M_3} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.80}$$

Así,  $e^{-i\alpha_1 M_1}$  representa una rotación sobre el eje  $x$ ,  $e^{-i\alpha_2 M_2}$  representa una rotación sobre el eje  $y$ , mientras que  $e^{-i\alpha_3 M_3}$  representa una rotación sobre el eje  $z$ .

Veamos que reglas de conmutación cumplen los generadores de las rotaciones  $M_1, M_2, M_3$ . Primero notemos que

$$\begin{aligned}
M_1 M_2 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 M_1 &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_1 M_3 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 M_1 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_2 M_3 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 M_2 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.81}$$

Por lo que

$$[M_1, M_2] = iM_3, \quad [M_3, M_1] = iM_2, \quad [M_2, M_3] = iM_1. \tag{9.82}$$

Esta reglas de conmutación se pueden escribir como

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k. \tag{9.83}$$

Por el hecho de que el conmutador de dos generadores de rotación nos da otro generador de rotación, se dice que estos generadores forman un álgebra de Lie, el álgebra de Lie de  $SO(3)$ . Note que, como el conmutador entre dos generadores no es cero, dos generadores no se pueden diagonalizar simultáneamente. Ahora, definamos

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \tag{9.84}$$

de donde

$$M^2 = 2I, \quad (9.85)$$

por lo tanto

$$[M^2, M_i] = 0. \quad (9.86)$$

Así, los valores propios de  $M^2$  se puede obtener al mismo tiempo que cualquiera de los generadores  $M_i$ .

Los valores propios de los generadores  $M_i$  se pueden calcular directamente y están dados por

$$M_1 V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (9.87)$$

$$M_2 V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (9.88)$$

$$M_3 V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.89)$$

Si  $a = 1$ , en cada caso se tienen vectores propios ortonormales. Estos resultados no son difíciles de obtener, posteriormente veremos que los generadores de las rotaciones en el espacio de las funciones de  $x$  están relacionados con operadores diferenciales.

Con el símbolo  $\epsilon_{ijk}$  las matrices  $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$  se pueden escribir de forma más económica. En efecto, en componentes tenemos

$$(M_1)_{ij} = i\epsilon_{i1j}, \quad (M_2)_{ij} = i\epsilon_{i2j}, \quad (M_3)_{ij} = i\epsilon_{i3j}. \quad (9.90)$$

Por ejemplo,

$$(M_1)_{ij} = i\epsilon_{i1j} = i \begin{pmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{112} & \epsilon_{113} \\ \epsilon_{211} & \epsilon_{212} & \epsilon_{213} \\ \epsilon_{311} & \epsilon_{312} & \epsilon_{313} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.91)$$

se puede probar que las demás igualdades se cumplen.

Así, las componentes cualquier matriz antisimétrica se puede escribir como

$$M_{ik} = -i\alpha_j(M_j)_{ik} = \alpha_j\epsilon_{ijk}. \quad (9.92)$$

Ahora, si  $\alpha_i$  es infinitesimal, por ejemplo  $\delta\alpha_i = \alpha_i/N$  con  $N$  grande, una transformación infinitesimal en el espacio de  $x$  está dada por

$$X' = \Lambda X = (I - i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{M})X. \quad (9.93)$$

En componentes se tiene

$$\begin{aligned} x'_i &\approx \Lambda_{ik}x_k = (I - i\delta\alpha_j M_j)_{ik}x_k = (\delta_{ik} - i\delta\alpha_j(M_j)_{ik})x_k \\ &= (\delta_{ik} + \delta\alpha_j\epsilon_{ijk})x_k = x_i + \epsilon_{ijk}\delta\alpha_j x_k = x_i + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{x})_i, \end{aligned} \quad (9.94)$$

es decir

$$x'_i \approx x_i + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{x})_i. \quad (9.95)$$

## 9.5. Armónicos esféricos

Hasta ahora nos hemos enfocado en las transformaciones que pasan del espacio  $\vec{r}$  al  $\vec{r}'$ . Ahora veamos que pasa con las funciones que actúan en estos espacios. Supongamos que tenemos una función,  $F$ , en  $\mathbf{R}^3$ . Entonces al evaluar esta función en un punto de  $\vec{r}'$ , ocupando la transformación infinitesimal (9.69) se encuentra

$$F(\vec{r}') \approx F(\vec{r} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) = F(\vec{r}) + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}), \quad (9.96)$$

Ocupando la propiedad cíclica del triple producto escalar se tiene

$$(\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = \left( \vec{\nabla} F(\vec{r}) \times \delta\vec{\alpha} \right) \cdot \vec{r} = \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} F(\vec{r}) \right) \cdot \delta\vec{\alpha} = i \left( \vec{\delta\alpha} \cdot \vec{L} \right) F(\vec{r})$$

con

$$\vec{L} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}. \quad (9.97)$$

Así,

$$F(\vec{r}') \approx \left( 1 + i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{L} \right) F(\vec{r}). \quad (9.98)$$

Por lo tanto, el operador  $\vec{L}$  es el generador de rotaciones en el espacio de funciones. Anteriormente vimos que este operador es Hermítico, por lo que sus

valores propios son reales.

Veamos que forma tiene una rotación finita. Igual que en caso del espacio  $\vec{r}$ , tomaremos  $\delta\vec{\alpha} = \vec{\alpha}/N$  y consideremos que para tener una transformación finita debemos hacer el producto de un número infinito de transformaciones infinitesimales. Entonces,

$$F(\vec{r}') \approx \left(1 + i\frac{\vec{\alpha}}{N} \cdot \vec{L}\right)^N F(\vec{r}). \quad (9.99)$$

Así, ocupando el resultado (9.72) se encuentra

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + i\frac{1}{N}\vec{\alpha} \cdot \vec{L}\right)^N = U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}. \quad (9.100)$$

Por lo tanto, una transformación finita está dada por

$$F(\vec{r}') = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}} F(\vec{r}). \quad (9.101)$$

Note que el operador  $U(\vec{\alpha})$  satisface

$$U(\vec{\alpha})^\dagger = U(-\vec{\alpha}) = U^{-1}(\vec{\alpha}). \quad (9.102)$$

Cuando un operador,  $A$ , cumple  $A^\dagger = A^{-1}$ , se dice que es un operador unitario. Así,  $U(\vec{\alpha})$  es unitario.

## 9.6. Reglas de Conmutación del Momento Angular

Anteriormente, vimos que los generadores  $M_i$  satisfacen las reglas de conmutación (9.83). Veamos que reglas de conmutación cumplen los operadores  $L_i$ . Primero notemos que definiendo  $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$  se tiene  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . En componentes se encuentra  $L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$ . De donde

$$[L_i, L_j] = [\epsilon_{ijm}x_lp_m, \epsilon_{jrs}x_rp_s] = \epsilon_{ijm}\epsilon_{jrs}[x_lp_m, x_rp_s] \quad (9.103)$$

$$= \epsilon_{ijm}\epsilon_{jrs}(x_l[p_m, x_r]p_s + x_r[x_l, p_s]p_m) \quad (9.104)$$

$$= \epsilon_{ijm}\epsilon_{jrs}(-ix_lp_s\delta_{mr} + ix_rp_m\delta_{ls}) \quad (9.105)$$

$$= i(\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrl} - \epsilon_{irl}\epsilon_{jlm})x_rp_m \quad (9.106)$$

El último paso se realizó renombrando índices. Además ocupando la propiedad (??) de  $\epsilon_{ijk}$  se obtiene

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad (9.107)$$

que son las mismas reglas de conmutación que cumple  $M_i$  (9.83). A esta reglas de conmutación se les llama el álgebra de Lie de  $SO(3)$ .

Anteriormente vimos que la matriz  $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$  conmuta con todas las matrices  $M_i$ . Para los operadores  $L_i$  el operador equivalente a  $M^2$  es

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_j L_j. \quad (9.108)$$

El cual cumple

$$\begin{aligned} [L^2, L_i] &= [L_j L_j, L_i] = L_j [L_j, L_i] + [L_j, L_i] L_j \\ &= i\epsilon_{jil} L_j L_l + i\epsilon_{jil} L_l L_j = -i(\epsilon_{ijl} L_j L_l + \epsilon_{ijl} L_l L_j). \end{aligned} \quad (9.109)$$

Ahora renombrando índices se encuentra

$$\epsilon_{ijl} L_j L_l = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijl} L_j L_l = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ilj} L_l L_j = \epsilon_{ilj} L_l L_j, \quad (9.110)$$

introduciendo esta igualdad en (9.109) se tiene

$$[L^2, L_i] = -i(\epsilon_{ilj} L_l L_j + \epsilon_{ilj} L_l L_j) - i(-\epsilon_{ijl} L_l L_l + \epsilon_{ijl} L_l L_j) = 0. \quad (9.111)$$

Por lo tanto,  $L^2$  conmuta con cualquier  $L_i$ . A  $L^2$  se le llama el Casimir del álgebra de Lie de  $SO(3)$ . Como  $L^2$  conmuta con cualquier  $L_i$ , este operador comparte vectores propios con estos tres operadores.

## 9.7. Ecuación de valores propios de $L^2$

Para obtener los vectores y valores propios de  $M_i$  y  $M^2$  resolvimos un problema de álgebra lineal, mas para obtener los vectores propios de  $L^2$  y, por ejemplo,  $L_z$  se deben plantear las ecuaciones

$$L^2 Y_{lm} = \lambda Y_{lm}, \quad L_z Y_{lm} = m Y_{lm}. \quad (9.112)$$

Estas son dos ecuaciones diferenciales. En efecto, considerando las expresiones en coordenadas esféricas de  $L^2$  y  $L_z$ , (2.110) y (2.104), se encuentra

$$\begin{aligned} L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= \lambda Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (9.113)$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (9.114)$$

De la segunda ecuación es claro que  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$  es de la forma

$$Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \alpha_{\lambda m} e^{im\varphi} P_{\lambda}^m(\theta). \quad (9.115)$$

Si queremos que la función  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$  no sea multivaluada debemos pedir  $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ . Esto implica  $e^{im\phi} = e^{im(\phi+2\pi)}$ , lo cual se cumple sólo si

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (9.116)$$

Por lo tanto,  $m$  debe ser un entero. Posteriormente veremos los posibles valores de  $\lambda$ .

Sustituyendo (9.115) en (9.113) se encuentra

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P_{\lambda}^m(\theta \varphi)}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{\lambda}^m(\theta, \varphi) = -\lambda P_{\lambda}^m(\theta, \varphi). \quad (9.117)$$

Con el cambio de variable  $u = \cos \theta$ , tenemos

$$\sin \theta = \sqrt{1 - u^2}, \quad \partial_{\theta} = -\sqrt{1 - u^2} \partial_u. \quad (9.118)$$

De donde, (9.117) toma la forma

$$\frac{d}{du} \left( (1 - u^2) \frac{dP_{\lambda}^m(u)}{du} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - u^2} \right) P_{\lambda}^m(u) = 0. \quad (9.119)$$

Esta es la llamada ecuación asociada de Legendre. Para el caso  $m = 0$  se define  $P_{\lambda}^0(u) = P_{\lambda}(u)$  que debe satisfacer

$$\frac{d}{du} \left( (1 - u^2) \frac{dP_{\lambda}(u)}{du} \right) + \lambda P_{\lambda}(u) = 0, \quad (9.120)$$

que es la llamada ecuación de Legendre. En lo que sigue veremos las soluciones de estas ecuaciones, pero sin resolverlas directamente si no estudiado la estructura del grupo de rotaciones. Primero veremos la propiedad ortormales de las soluciones de la ecuación (9.117).

## 9.8. Relaciones de Ortonormalidad

Supongamos que  $m$  y  $m'$  son enteros y que  $m \neq m'$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \left( e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} &= \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} \\ &= \frac{e^{i(m-m')\varphi}}{i(m-m')} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i(m-m')2\pi} - 1}{i(m-m')} = 0. \end{aligned} \quad (9.121)$$



Si  $m = m'$ , se encuentra

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left( e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \quad (9.122)$$

De donde, si  $m$  y  $m'$  son enteros se tiene

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left( e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} = 2\pi \delta_{mm'}. \quad (9.123)$$

Por lo tanto las funciones  $e^{im\varphi}$  son ortogonales en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Note que la ecuación (9.117) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P_\lambda^m(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left( \lambda \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) P_\lambda^m(\theta) = 0. \quad (9.124)$$

Como se puede observar, esta ecuación es tipo Sturm-Liouville. En este caso  $p(\theta) = \sin \theta$ ,  $r(\theta) = \frac{-m^2}{\sin \theta}$ . Considerando los resultados para las ecuaciones tipo Sturm-Liouville, como  $p(0) = p(\pi) = 0$ , se llega a

$$(\lambda' - \lambda) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_\lambda^m(\theta) = 0.$$

En particular si  $\lambda' \neq \lambda$

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_\lambda^m(\theta) = 0. \quad (9.125)$$

En general se tiene

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_\lambda^m(\theta) = \delta_{\lambda\lambda'} \beta_{\lambda m}, \quad \beta_{\lambda m} = \text{constante} > 0. \quad (9.126)$$

Por lo tanto, las funciones  $P_\lambda^m(\theta)$  son ortogonales.

Ocupando la ortogonalidad de las funciones  $e^{im\varphi}$  y  $P_\lambda^m(\theta)$ , se puede escojer  $\alpha_{lm}$  de tal forma que los armónicos esféricos sean ortonormales. En efecto, considerando que los armónicos esféricos tienen la forma (9.115) se encuentra

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{\lambda'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \left( \sin \theta \alpha_{\lambda'm'}^* e^{-im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \alpha_{\lambda m} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{\lambda'm'}^* \alpha_{\lambda m} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \alpha_{\lambda'm'}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \alpha_{\lambda'm}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \alpha_{\lambda'm}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \beta_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} \\
&= |\alpha_{\lambda'm}|^2 2\pi \beta_{\lambda m} \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}.
\end{aligned} \tag{9.127}$$

Entonces, si

$$|\alpha_{\lambda'm}|^2 = \frac{1}{2\pi \beta_{\lambda m}} \tag{9.128}$$

se cumple

$$\langle Y_{\lambda'm'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle = \int d\Omega Y_{\lambda'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}. \tag{9.129}$$

Así los armónicos esféricos son ortonormales.

## 9.9. Operadores Escalera y Espectro de $L^2$

Antes de resolver la ecuación diferencial (9.113) veamos algunas propiedades de las funciones propias  $Y_{\lambda m}$  y sus valores propios  $\lambda, m$ . Primero notemos que para cualquier función  $f$  se tiene

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle L_x f | L_x f \rangle = \langle f | L_x^\dagger L_x f \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle \\
0 &\leq \langle L_y f | L_y f \rangle = \langle f | L_y^\dagger L_y f \rangle = \langle f | L_y^2 f \rangle,
\end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \langle f | (L_x^2 + L_y^2) f \rangle = \langle f | (L^2 - L_z^2) f \rangle.$$

En particular si  $f = Y_{\lambda m}$ , se llega a

$$(L^2 - L_z^2) Y_{\lambda m} = (\lambda^2 - m^2) Y_{\lambda m}, \tag{9.130}$$

entonces

$$0 \leq (\lambda^2 - m^2) \langle Y_{\lambda m} | Y_{\lambda m} \rangle. \tag{9.131}$$

Si  $(\lambda^2 - m^2) < 0$  la única forma de que se cumpla esta desigualdad es que  $\langle Y_{lm} | Y_{lm} \rangle = 0$ , es decir  $Y_{lm} = 0$ . Si  $Y_{lm} \neq 0$  se tiene  $(\lambda^2 - m^2) \geq 0$ , entonces

$$-\sqrt{\lambda} \leq m \leq \sqrt{\lambda}. \quad (9.132)$$

Esta restricción nos permitirá encontrar los valores de  $\lambda$ .

Ahora definamos los operadores

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y. \quad (9.133)$$

Note que

$$\begin{aligned} L_{\mp} L_{\pm} &= (L_x \mp iL_y)(L_x \pm iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \pm i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 \mp L_z = L^2 - L_z^2 \mp L_z = L^2 - (L_z^2 \pm L_z), \end{aligned}$$

es decir,

$$L_{\mp} L_{\pm} = L^2 - (L_z^2 \pm L_z). \quad (9.134)$$

Claramente  $L_{\pm}$  conmuta con  $L^2$ :

$$[L^2, L_{\pm}] = 0. \quad (9.135)$$

Esto indica que  $L_{\pm}$  tiene funciones propias comunes con  $L^2$ . Además

$$[L_z, L_x \pm iL_y] = [L_z, L_x] \pm [L_z, L_y] = iL_y \pm L_x = \pm (L_x \pm iL_y), \quad (9.136)$$

es decir

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}. \quad (9.137)$$

Por lo que  $L_{\pm}$  no tiene funciones propias comunes con  $L_z$ .

Veamos que efecto tiene el operador  $L_{\pm}$  sobre las funciones propias de  $L_z$ . Definamos la función

$$\tilde{Y} = L_{\pm} Y_{\lambda m}, \quad (9.138)$$

entonces, tomando en cuenta que  $L^2$  y  $L_{\pm}$  conmutan, se tiene

$$L^2 \tilde{Y} = L^2 L_{\pm} Y_{\lambda m} = L_{\pm} L^2 Y_{\lambda m} = \lambda L_{\pm} Y_{\lambda m} = \lambda \tilde{Y}. \quad (9.139)$$

Por lo tanto,  $L_{\pm}Y_{\lambda m}$  también es función propia de  $L^2$  con el mismo valor propio,  $\lambda$ , que  $Y_{\lambda m}$ . Además, considerando el conmutador (9.137) tenemos

$$\begin{aligned} L_z \tilde{Y} &= L_z L_{\pm} Y_{\lambda m} = (L_{\pm} L_z \pm L_{\pm}) Y_{\lambda m} = (L_{\pm} L_z Y_{\lambda m} \pm L_{\pm} Y_{\lambda m}) \\ &= (m L_{\pm} Y_{\lambda m} \pm L_{\pm} Y_{\lambda m}) = (m \pm 1) L_{\pm} Y_{\lambda m} = (m \pm 1) \tilde{Y}, \end{aligned} \quad (9.140)$$

es decir,

$$L_z L_{\pm} Y_{\lambda m} = (m \pm 1) L_{\pm} Y_{\lambda m}. \quad (9.141)$$

Por lo tanto,  $\tilde{Y} = L_{\pm} Y_{\lambda m}$  es vector propio de  $L_z$ . Pero no con el valor propio de  $Y_{\lambda m}$  si no con el de  $Y_{\lambda m \pm 1}$ . De donde, como  $L_z$  tiene un espectro no degenerado, se debe cumplir

$$L_{\pm} Y_{\lambda m} = \alpha(\lambda, m) Y_{\lambda m \pm 1}, \quad \alpha(\lambda, m) = \text{cte.} \quad (9.142)$$

El valor de  $\alpha(\lambda, m)$  lo obtendremos posteriormente.

Como podemos ver, el operador  $L_{\pm}$  es muy útil, pues nos permite pasar de una función propia  $Y_{\lambda m}$  a otra  $Y_{\lambda m \pm 1}$ . Ahora si aplicamos  $n$  veces este operador obtenemos

$$(L_{\pm})^n Y_{\lambda m} = \tilde{\alpha}(\lambda, m) Y_{\lambda m \pm n}, \quad (9.143)$$

con

$$L_z Y_{\lambda m \pm n} = (m \pm n) Y_{\lambda m \pm n}. \quad (9.144)$$

Así,  $(m \pm n)$  es valor propio de  $L_z$ , sin importar el valor de  $n$ . Ahora es claro que dado cualquier  $m$  existe una  $n_a$  y  $n_b$  tal que

$$\sqrt{\lambda} < (m + n_a), \quad (m - n_b) < -\sqrt{\lambda},$$

En este caso no se cumple la restricción (9.132), por lo que  $Y_{\lambda m + n_a} = 0$  y  $Y_{\lambda m - n_b} = 0$ . Entonces, debe existir una  $m$  máxima, que llamaremos  $l$ , tal que  $L_+ Y_{\lambda l} = 0$ , con  $Y_{\lambda l} \neq 0$ . También es claro que debe existir una  $m$  mínima,  $l'$ , de tal forma que  $L_- Y_{\lambda l'} = 0$ , con  $Y_{\lambda l'} \neq 0$ .

Supongamos que  $l$  es el valor propio máximo que puede tener  $L_z$ . Entonces, considerando (9.134) se tiene

$$L_- L_+ Y_{\lambda l} = (L^2 - (L_z^2 + L_z)) Y_{\lambda l} = [\lambda - l(l+1)] Y_{\lambda l} = 0,$$

esto implica que

$$\lambda = l(l+1).$$

Además, si  $l'$  es el valor propio mínimo que puede tener  $L_z$ , se tiene

$$L_+(L_-Y_{\lambda'}) = (L^2 - (L_z^2 - L_z))Y_{\lambda'} = [l(l+1) - l'(l'-1)]Y_{\lambda'} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} l(l+1) - l'(l'-1) &= l^2 - l'^2 + l + l' = (l+l')(l-l') + l + l' \\ &= (l+l')(l+1-l') = 0. \end{aligned} \quad (9.145)$$

Entonces,  $l'_+ = (l+1)$  o  $l'_- = -l$ , claramente el único valor permitido es  $l'_- = -l$  y el mínimo valor que puede tomar  $m$  es  $-l$ . Así los valores propios de  $L_z$  deben cumplir

$$-l \leq m \leq l \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (9.146)$$

Claramente hay  $2l+1$  funciones propias con el mismo valor propio  $l(l+1)$ . Es decir, para cada propio  $l(l+1)$  hay  $2l+1$  funciones que satisfacen

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (9.147)$$

con valores propios de  $L_z$  que cumplen (9.146).

Un resultado importante de todo este desarrollo es que, dado un valor  $l$ , basta obtener un armónico esférico,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , para que, mediante los operadores  $L_{\pm}$ , obtener los  $2l$  restantes. Por ejemplo podemos obtener el armónico esférico  $Y_{ll}(\theta, \varphi)$  y con el resto el operador de  $L_-$  obtener los restantes. De la misma forma si conocemos función  $Y_{l0}$  cualquier otro armónico esférico está dado por

$$(L_-)^m Y_{l0} = \alpha Y_{l,-m} \quad (9.148)$$

o por

$$(L_+)^m Y_{l0} = \alpha Y_{l,m}. \quad (9.149)$$

Posteriormente ocuparemos estos resultados para obtener de forma explícita los armónicos esféricos.

## 9.10. El armónico esférico $Y_l(\theta, \varphi)$

En esta sección obtendremos el armónico esférico  $Y_l(\theta, \varphi)$  con el cual podemos construir el resto de los armónico esféricos. De (9.115) sabemos que

$$Y_l(\theta, \varphi) = \frac{\alpha_l e^{il\varphi} \Theta_l^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \quad (9.150)$$

y de (9.167) tenemos que se debe cumplir  $L_+ Y_l(\theta, \varphi) = 0$ .

Antes de continuar observemos que en coordenadas esféricas se encuentra

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= L_x \pm iL_y \\ &= i \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \pm i(-i) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left( (\pm \cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta (i \cos \varphi \mp \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left( \pm (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left( \pm e^{\pm i\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + i e^{\pm i\varphi} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (9.151)$$

Por lo tanto,

$$L_+ Y_l(\theta, \varphi) = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\alpha_l e^{il\varphi} \Theta_l^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} = 0. \quad (9.152)$$

Por lo que  $\Theta_l^l(\theta)$  debe satisfacer

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) \Theta_l^l(\theta) = 0, \quad (9.153)$$

así

$$\Theta_l^l(\theta) = \alpha \sin^l \theta, \quad \alpha = \text{constante}. \quad (9.154)$$

Esto quiere decir que

$$Y_l(\theta, \varphi) = \frac{\alpha_l e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}}. \quad (9.155)$$

La constante se determina  $\alpha_u$  pidiendo la condición  $\langle Y_u | Y_u \rangle = 1$ , que es

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_u^*(\theta, \varphi) Y_u(\theta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \frac{\alpha_u e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}} \right)^* \frac{\alpha_u e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{|\alpha_u|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta e^{i(l-l)\varphi} \\ &= |\alpha_u|^2 \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta = 1, \end{aligned}$$

entonces

$$|\alpha_u|^2 = \frac{1}{\int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta}. \quad (9.156)$$

Para obtener esta constante, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\sin^{n-1} \theta \cos \theta) &= (n-1) \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta - \sin^{n-1} \theta \sin \theta \\ &= (n-1) \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^n \theta, \end{aligned}$$

de donde

$$\sin^n \theta = \frac{n-1}{n} \sin^{n-2} \theta - \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (\sin^{n-1} \theta \cos \theta). \quad (9.157)$$

Por lo que,

$$\int_0^\pi d\theta \sin^n \theta = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-2} \theta. \quad (9.158)$$

En particular

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta &= \frac{2l}{2l+1} \int_0^\pi d\theta \sin^{2l-1} \theta = \frac{2l}{2l+1} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-1)+1} \theta \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))}{(2l+1)(2(l-1)+1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-2)+1} \theta \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2))}{(2l+1)(2(l-1)+1)(2(l-2)+1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-3)+1} \theta \\ &\vdots \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2)) \cdots (2(l-i))}{(2l+1)(2(l-1)+1)(2(l-2)+1) \cdots (2(l-i)+1)} \\ &\quad \left( \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-(i+1))+1} \theta \right). \end{aligned}$$

Este proceso se puede hacer hasta que  $2(l - (i + 1)) + 1 = 1$ , que implica  $l = i + 1$ , es decir  $i = l - 1$ . En este caso

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2)) \cdots 2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\ &= \frac{2^l(l)(l-1)(l-2) \cdots 1}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3} 2 \\ &= \frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3},\end{aligned}$$

considerando

$$\begin{aligned}(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3 &= \frac{(2l+1)(2l)(2l-1)(2(l-1))(2l-3) \cdots 3 \cdot 2}{(2l)(2(l-1)) \cdots 2} \\ &= \frac{(2l+1)!}{2^l l!}\end{aligned}\tag{9.159}$$

se llega a

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta = \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}.\tag{9.160}$$

Tomando en cuenta este resultado, tenemos que

$$\alpha_u = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \frac{1}{2^l l!}.\tag{9.161}$$

Entonces

$$Y_u(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{e^{il\varphi}}{2^l l!} \sin^l \theta.\tag{9.162}$$

## 9.11. Constante $\alpha$ y reglas de recurrencia

Ahora vamos a determinar  $\alpha$  definida en Eq. (9.142). Ocupando  $L_\pm Y_{lm} = \alpha_\pm Y_{lm\pm 1}$ , que los armónicos esféricos son ortonormales y las propiedades del producto escalar se tiene

$$\begin{aligned}\langle L_\pm Y_{lm} | L_\pm Y_{lm} \rangle &= \langle \alpha_\pm Y_{lm\pm 1} | \alpha_\pm Y_{lm\pm 1} \rangle = \alpha_\pm^* \alpha_\pm \langle Y_{lm\pm 1} | Y_{lm\pm 1} \rangle \\ &= |\alpha_\pm|^2,\end{aligned}\tag{9.163}$$



además

$$\begin{aligned}
\langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle &= \langle Y_{lm} | L_{\pm}^{\dagger} L_{\pm} Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | L_{\mp} L_{\pm} Y_{lm} \rangle \\
&= \langle Y_{lm} | [L^2 - (L_z^2 \pm L_z)] Y_{lm} \rangle \\
&= \langle Y_{lm} | [l(l+1) - (m^2 \pm m)] Y_{lm} \rangle \\
&= (l^2 + l - m^2 \mp m) \langle Y_{lm} | Y_{lm} \rangle \\
&= (l^2 - m^2 + l \mp m) = (l \pm m)(l \mp m) + (l \mp m) \\
&= (l \mp m)(l \pm m + 1). \tag{9.164}
\end{aligned}$$

Igualando (9.163) con (9.164) se encuentra

$$|\alpha_{\pm}|^2 = (l \mp m)(l \pm m + 1). \tag{9.165}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}. \tag{9.166}$$

Así, (9.142) tiene la forma

$$L_{\pm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{lm \pm 1}(\theta, \varphi). \tag{9.167}$$

### 9.11.1. Relaciones de recurrencia de $L_{\pm}$

Antes de obtener la forma general de todos los armónicos esféricos veamos algunas relaciones de recurrencia de  $L_{\pm}$  que son de utilidad. Primero note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) &= \mp k (\sin \theta)^{\mp k-1} (\cos \theta) f(\theta) + (\sin \theta)^{\mp k} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \\
&= (\sin \theta)^{\mp k} \left( \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k (\cot \theta) f(\theta) \right),
\end{aligned}$$

por lo que

$$(\sin \theta)^{\pm k} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) = \left( \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k (\cot \theta) f(\theta) \right).$$

Entonces, considerando que  $(\sin \theta)^{1 \pm k} = (\sin \theta)^{\pm(k \pm 1)}$  y el cambio de variable  $u = \cos \theta$ , se llega a

$$- (\sin \theta)^{\pm(k \pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) = \left( \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k (\cot \theta) f(\theta) \right).$$

Ocupando este resultado se obtiene

$$\begin{aligned}
L_{\pm} (f(\theta)e^{ik\varphi}) &= e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i(\cot \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (f(\theta)e^{ik\varphi}) \\
&= e^{i(k\pm 1)\varphi} \left( \pm \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - k(\cot \theta) f(\theta) \right) \\
&= \pm e^{i(k\pm 1)\varphi} \left( \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k(\cot \theta) f(\theta) \right) \\
&= \mp e^{i(k\pm 1)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right).
\end{aligned}$$

Usando esta igualdad y definiendo

$$k' = k \pm 1, \quad g(\theta) = (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right),$$

se encuentra

$$\begin{aligned}
L_{\pm}^2 (f(\theta)e^{ik\varphi}) &= (\mp)L_{\pm} \left( e^{ik'\varphi} g(\theta) \right) \\
&= (\mp)^2 e^{i(k'\pm 1)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k'\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp k'} g(\theta) \right) \\
&= (\mp)^2 e^{i(k\pm 2)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 2)} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp(k\pm 1)} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) \right) \\
&= (\mp)^2 e^{i(k\pm 2)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 2)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right),
\end{aligned}$$

en general se tiene

$$(L_{\pm})^n (f(\theta)e^{ik\varphi}) = (\mp)^n e^{i(k\pm n)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm n)} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left( (\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right). \quad (9.168)$$

## 9.12. Forma explícita de los armónicos esféricos

Si logramos obtener algún armónico esférico, ocupando el operado escalera,  $L_{\pm}$ , podemos obtener los demás. Por ejemplo, supongamos que tenemos el armónico esférico  $Y_{ll}$ . Entonces, ocupando reiteradamente (9.167) se tiene

$$L_- Y_{ll} = \sqrt{2l} Y_{l, l-1},$$

$$\begin{aligned}
L_-^2 Y_{ll} &= \sqrt{2l} L_- Y_{l-1} = \sqrt{(2l)(2l-1)2} Y_{l-2} = \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} Y_{l-2}, \\
L_-^3 Y_{ll} &= \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} L_- Y_{l-2} = \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} \sqrt{(2l-2)3} Y_{l-3} \\
&= \sqrt{\frac{(2l)!3!}{(2l-3)!}} Y_{l-3}, \\
&\vdots \\
L_-^n Y_{ll} &= \sqrt{\frac{(2l)!n!}{(2l-n)!}} Y_{l-n}.
\end{aligned} \tag{9.169}$$

Por lo tanto, si  $n = l - m$  se encuentra

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi). \tag{9.170}$$

Considerando los resultados previos (9.162) y (9.168) para  $k = l$  y  $n = l - m$  se tiene

$$\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} \left( \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{e^{il\varphi}}{2^l l!} \sin^l \theta \right) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} (L_-)^{l-m} (e^{il\varphi} \sin^l \theta) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} (+)^{l-m} e^{i(l-(l-m))\varphi} \\
&\quad \sin^{l-(l-m)} \theta \frac{\partial^{l-m}}{\partial u^{l-m}} (\sin^l \theta \sin^l \theta) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{\partial^{l-m}}{\partial u^{l-m}} (\sin^{2l} \theta).
\end{aligned}$$

Note que ninguna propiedad de estas funciones cambia si multiplicamos por un factor de norma uno, es decir por una potencia de  $\pm i$  o de  $\pm 1$ . En la literatura existen diferentes elecciones de este factor, por conveniencia tomaremos  $(-)^l$ . Entonces, los armónicos esféricos son

$$\begin{aligned}
Y_{lm}(\theta, \varphi) &= (-)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{\partial^{l-m}}{\partial u^{l-m}} (\sin^{2l} \theta) \tag{9.171} \\
u &= \cos \theta, \quad -l \leq m \leq l.
\end{aligned}$$

Esta expresión de los armónicos esféricos es común en mecánica cuántica, en la próxima sección veremos otra que es más usual en electrostática.

### 9.13. Polinomios de Legendre y Polinomios Asociados de Legendre

Tomando el caso  $m = 0$  en (9.171) se tiene

$$\begin{aligned} Y_{l0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(-)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (\sin^{2l} \theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(-)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (1-u^2)^l \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2-1)^l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(u). \end{aligned} \quad (9.172)$$

Donde

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2-1)^l, \quad (9.173)$$

a esta expresión se le llama Fórmula de Rodríguez de los polinomios de Legendre de grado  $l$ . Por lo que el armónico esférico de orden  $m = 0$  es

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (9.174)$$

Con este armónico esférico se pueden obtener el resto. En efecto, de (9.167) se encuentra

$$\begin{aligned} L_{\pm} Y_{l0} &= \sqrt{l(l+1)} Y_{l\pm 1} = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} Y_{l\pm 1}, \\ (L_{\pm})^2 Y_{l0} &= \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} L_{\pm} Y_{l\pm 1} = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \sqrt{(l-1)(l+2)} Y_{l\pm 2} \\ &= \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} Y_{l\pm 2}, \\ &\vdots \\ (L_{\pm})^m Y_{l0} &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} Y_{l(\pm m)}, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (9.175)$$

Entonces, tomando en cuenta (9.168) se llega a

$$\begin{aligned}
Y_{l(\pm m)}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (L_{\pm})^m Y_{l0}(\theta, \varphi), \\
&= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (\mp)^m e^{\pm im\varphi} \sin^m \theta \frac{d^m}{du^m} \left( \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \right) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} (\pm)^m e^{\pm im\varphi} \left[ (-)^m (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \right].
\end{aligned}$$

Definiremos los polinomios asociados de Legendre de grado positivo como

$$P_l^m(u) = (-)^m (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l(u), \quad (9.176)$$

así

$$Y_{l(\pm m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{\pm im\varphi} (\pm)^m P_l^m(\cos \theta), \quad m \geq 0. \quad (9.177)$$

es decir, si  $m \geq 0$ ,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad (9.178)$$

$$Y_{l(-m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{-im\varphi} (-)^m P_l^m(\cos \theta). \quad (9.179)$$

Note que

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-)^m Y_{l(-m)}(\theta, \varphi). \quad (9.180)$$

Ahora, definiendo los polinomios asociados de Legendre de grado negativo como

$$P_l^{-m}(u) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(u), \quad (9.181)$$

se tiene

$$Y_{l(-m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{-im\varphi} P_l^{-m}(\cos \theta). \quad (9.182)$$

Note que si definimos  $k = -m$  esta expresión se escribe como

$$Y_{lk}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{4\pi(l+k)!}} e^{ik\varphi} P_l^k(\cos \theta), \quad (9.183)$$

que tiene la forma de (9.178). Por lo tanto, cualquier armónico esférico se escribe como

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l. \quad (9.184)$$

Además, de las relaciones de ortonormalidad (9.129) se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{l'l} &= \langle Y_{l'm} | Y_{lm} \rangle = \int d\Omega Y_{l'm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \sqrt{\frac{(2l'+1)(l'-m)!}{4\pi(l'+m)!}} e^{im\varphi} P_{l'}^m(\cos \theta) \right)^* \\ &\quad \left( \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta), \end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) = \left( \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \right) \delta_{l'l}. \quad (9.185)$$

Tomando el cambio de variable  $u = \cos \theta$  se encuentra

$$\int_{-1}^1 du P_{l'}^m(u) P_l^m(u) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}. \quad (9.186)$$

Estas son las relaciones de ortonormalidad de los polinomios asociados de Legendre. En particular, para los polinomios de Legendre,  $m = 0$ , se llega a

$$\int_{-1}^1 du P_{l'}(u) P_l(u) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}, \quad (9.187)$$

que son las relaciones de ortonormalidad de los polinomios de Legendre.

## 9.14. Propiedades de los Polinomios de Legendre

Ahora veremos algunas propiedades de los Polinomios de Legendre. Primero recordemos que se cumple la llamada fórmula de Rodriguez

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l, \quad (9.188)$$

de esta fórmula se puede ver que los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(u) = 1. \quad (9.189)$$

$$P_1(u) = u, \quad (9.190)$$

$$P_2(u) = \frac{1}{2} (3u^2 - 1), \quad (9.191)$$

$$P_3(u) = \frac{1}{2} (5u^3 - 3u), \quad (9.192)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8} (35u^4 - 30u^2 + 3), \quad (9.193)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{8} (63u^5 - 70u^3 + 15). \quad (9.194)$$

Para obtener la expresión general de los polinomios de Legendre recordemos el binomio de Newton

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n A^{n-k} B^k, \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (9.195)$$

En particular

$$(u^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} u^{2(l-k)}. \quad (9.196)$$

Además si  $n$  y  $m$  son dos naturales tales que  $n \leq m$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^n u^m}{du^n} &= \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \frac{du^m}{du} = m \frac{d^{n-1} u^{m-1}}{du^{n-1}} = \frac{m!}{(m-1)!} \frac{d^{n-1} u^{m-1}}{du^{n-1}} \\ &= \frac{m!}{(m-1)!} (m-1) \frac{d^{n-2} u^{m-2}}{du^{n-2}} = \frac{m!}{(m-2)!} \frac{d^{n-2} u^{m-2}}{du^{n-2}} = \dots \\ &= \frac{m!}{(m-n)!} \frac{d^{n-n} u^{m-n}}{du^{n-n}} \\ &= \frac{m!}{(m-n)!} u^{m-n} \end{aligned}$$

Para el caso  $n > m$ ,

$$\frac{d^n u^m}{du^n} = 0. \quad (9.197)$$

De donde

$$\frac{d^n u^m}{du^n} = \frac{m!}{(m-n)!} u^{m-n} \theta(m-n), \quad \theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}. \quad (9.198)$$

En particular, si  $l$  y  $k$  son naturales se tiene

$$\frac{d^l u^{2(l-k)}}{du^l} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} u^{l-2k} \theta(l-2k). \quad (9.199)$$

Así, (10.23) es diferente de cero sólo si  $l-2k \leq 0$ . Esto quiere decir que el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $l/2$ . Si  $l$  es par, es decir  $l = 2r$  entonces el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $r$ . De donde,  $k$  puede tomar los valores  $(0, 1, 2, 3, \dots, r)$ . Si  $l$  es impar  $l = 2r + 1$ , entonces el máximo valor que puede tomar  $k$  es  $r + 1/2$ , que no es un natural. Como  $k$  es natural, en este caso  $k$  sólo puede tomar los valores  $(0, 1, 2, 3, \dots, r)$ . Definiremos  $[l/2]$  como el máximo entero menor o igual a  $l/2$ . Entonces, en ambos caso  $k$  puede tomar los valores  $(0, 1, 2, 3, \dots, [l/2])$ . Considerando esta definición, (10.23) se puede escribir como

$$\frac{d^l u^{2(l-k)}}{du^l} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} u^{l-2k} \theta\left(\left[\frac{l}{2}\right] - k\right). \quad (9.200)$$

Por lo que, de (9.196) y (9.200) se tiene

$$\begin{aligned} P_l(u) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (u^2 - 1)^l}{du^l} = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{2^l l! k! (l-k)!} \frac{d^l u^{2l-2k}}{du^l} \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} u^{l-2k} \theta\left(\left[\frac{l}{2}\right] - k\right). \end{aligned} \quad (9.201)$$

De donde, la expresión general para los polinomios de Legendre es

$$P_l(u) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} u^{l-2k}. \quad (9.202)$$

De esta expresión se puede ver que

$$P_l(-u) = (-1)^l P_l(u). \quad (9.203)$$

Por lo tanto, si  $l$  es par,  $P_l(u)$  es par y si  $l$  es impar,  $P_l(u)$  es impar.



### 9.14.1. Función generadora

Ahora veremos la función generadora de los polinomios de Legendre. Primero note que  $u = \cos \theta \leq 1$  y si  $0 < z < 1$ , entonces  $z = 1 - \epsilon$ , con  $0 < \epsilon < 1$ . Además recordemos que si  $\alpha < 1$ , entonces se cumplen las series

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n, \quad (9.204)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \alpha^n. \quad (9.205)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2u < 2 + \sum_{n \geq 2} \epsilon^n &= 1 - \epsilon + 1 + \epsilon + \sum_{n \geq 2} \epsilon^n = z + \sum_{n \geq 0} \epsilon^n = z + \frac{1}{1 - \epsilon} \\ &= z + \frac{1}{z}, \end{aligned} \quad (9.206)$$

de donde,

$$2uz - z^2 = z(2u - z) < 1. \quad (9.207)$$

Por lo tanto, considerando (9.205) y el binomio de Newton (9.195) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zu + z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - z(2u - z)}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n (2u - z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n \sum_{k=0}^n C_k^n (2u)^{n-k} (-z)^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! (-)^k 2^{n-k} C_k^n u^{n-k}}{2^{2n}(n!)^2} z^{n+k}. \end{aligned} \quad (9.208)$$

Para simplificar los cálculos, definamos  $l = n + k$ , entonces  $n = l - k$ . Como  $n$  es el máximo valor que puede tener  $k$ , se cumple  $k \leq n = l - k$ , esto implica  $2k \leq l$ . De donde el máximo valor que puede tomar  $k$  es el mayor entero menor o igual a  $l/2$ , que es  $[l/2]$ . Con este cambio de variable se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zu + z^2}} &= \sum_{l \geq 0} \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]! (-)^k 2^{l-2k} C_k^{l-k} u^{l-2k}}{2^{2(l-k)} [(l-k)!]^2} z^l \\ &= \sum_{l \geq 0} z^l \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]! (-)^k 2^{l-2k} (l-k)!}{k! (l-2k)! 2^{2(l-k)} [(l-k)!]^2} u^{l-2k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l \geq 0} z^l \left( \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]!(-)^k}{2^l(l-k)!k!(l-2k)!} u^{l-2k} \right), \quad (9.209)$$

tomando en cuenta (9.202) se llega a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zu+z^2}} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u), \quad z < 1. \quad (9.210)$$

Esta igualdad es importante pues permite probar varias propiedades de los Polinomios de Legendre. Por ejemplo, si  $u = 0$ , ocupando la serie (9.205) se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l(2l)!}{2^l l!^2} z^{2l} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(0), \quad (9.211)$$

por lo que

$$P_{2l}(0) = \frac{(-)^l(2l)!}{2^l l!^2} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}, \quad P_{2l+1}(0) = 0. \quad (9.212)$$

Si  $u = \pm 1$ , ocupando la serie (9.204) se consigue

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp 2z + z^2}} = \frac{1}{1 \mp z} = \sum_{l \geq 0} (\pm 1)^l z^l = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(\pm 1), \quad (9.213)$$

de donde

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l. \quad (9.214)$$

### 9.14.2. Relaciones de recurrencia

Los polinomios de Legendre cumplen las siguientes reglas de recurrencia

$$(l+1)P_{l+1}(u) - (2l+1)uP_l(u) + lP_{l-1}(u) = 0, \quad (9.215)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \left( 2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) + \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0., \quad (9.216)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - u \frac{dP_l(u)}{du} - (l+1)P_l(u) = 0, \quad (9.217)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \frac{dP_{l-1}(u)}{du} - (2l+1)P_l(u) = 0, \quad (9.218)$$

$$(u^2 - 1) \frac{dP_l(u)}{du} - luP_l(u) + lP_{l-1}(u) = 0. \quad (9.219)$$

Para probar la identidad (9.215) definamos

$$W(z, u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2uz + z^2}} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u), \quad (9.220)$$

de donde

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = \frac{-(-2u + 2z)}{2(1 - 2uz + z^2)^{3/2}} = \frac{(u - z)W(u, z)}{(1 - 2uz + z^2)},$$

es decir,

$$(1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = (u - z)W(u, z). \quad (9.221)$$

Además

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = \sum_{l \geq 0} l z^{l-1} P_l(u),$$

considerando este resultado en (9.221) se obtiene

$$\begin{aligned} & (1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial z} - (u - z)W(u, z) \\ &= (1 - 2uz + z^2) \sum_{l \geq 0} l z^{l-1} P_l(u) - (u - z) \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (l P_l(u) z^{l-1} - 2lu P_l(u) z^l + l P_l(u) z^{l+1} - u P_l(u) z^l + P_l(u) z^{l+1}) \\ &= \sum_{l \geq 0} (l P_l(u) z^{l-1} - (2l + 1)u P_l(u) z^l + (l + 1) P_l(u) z^{l+1}) = 0. \end{aligned} \quad (9.222)$$

Ahora, note que se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 0} l P_l(u) z^{l-1} &= \sum_{l \geq l} l P_l(u) z^{l-1} = \sum_{l \geq 0} (l + 1) P_{l+1}(u) z^l \\ &= P_1(u) + \sum_{l \geq 1} (l + 1) P_{l+1}(u) z^l, \\ \sum_{l \geq 0} (l + 1) P_l(u) z^{l+1} &= \sum_{l \geq 1} l P_{l-1}(u) z^l \end{aligned} \quad (9.223)$$

introduciendo estos resultados en (9.222) se encuentra

$$P_1(u) - u P_0(u) + \sum_{l \geq 1} ((l + 1) P_{l+1}(u) - (2l + 1)u P_l(u) + l P_{l-1}(u)) z^l = 0.$$

Claramente esta igualdad implica (9.215).

Para probar la identidad (9.216) derivaremos  $W(z, u)$  con respecto a  $u$ , en ese caso se tiene

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial u} = \frac{-(-2z)}{2(1 - 2uz + z^2)^{3/2}} = \frac{zW(u, z)}{(1 - 2uz + z^2)},$$

es decir,

$$(1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial u} - zW(u, z) = 0. \quad (9.224)$$

Además

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial u} = \sum_{l \geq 0} z^l \frac{dP_l(u)}{du},$$

por lo que

$$\begin{aligned} & (1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial u} - zW(u, z) \\ &= (1 - 2uz + z^2) \sum_{l \geq 0} z^l \frac{dP_l(u)}{du} - z \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \left( \frac{dP_l(u)}{du} z^l - \left( 2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) z^{l+1} + \frac{dP_l(u)}{du} z^{l+2} \right) = \quad (9.225) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $P_0(u) = 1$  y  $P_1(u) = u$  se encuentra

$$\sum_{l \geq 0} \frac{dP_l(u)}{du} z^l = \sum_{l \geq 1} \frac{dP_l(u)}{du} z^l = \sum_{l \geq 0} \frac{dP_{l+1}(u)}{du} z^{l+1} = z + \sum_{l \geq 1} \frac{dP_{l+1}(u)}{du} z^{l+1},$$

además

$$\sum_{l \geq 0} \frac{dP_l(u)}{du} z^{l+2} = \sum_{l \geq 1} \frac{dP_{l-1}(u)}{du} z^{l+1}. \quad (9.226)$$

Sustituyendo esto dos resultados en (9.225) se llega a

$$(1 - 1)z + \sum_{l \geq 1} \left( \frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \left( 2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) + \frac{dP_{l-1}(u)}{du} \right) z^{l+1} = 0,$$

que implica (9.216)

Para probar la tercera identidad (9.217) derivaremos con respecto a  $u$  a (9.215), que implica

$$(l+1)\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - (2l+1)P_l(u) - (2l+1)u\frac{dP_l(u)}{du} + l\frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (9.227)$$

Multiplicando por  $l$  a (9.216) se encuentra

$$l\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - l\left(2u\frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u)\right) + l\frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (9.228)$$

Restando (9.227) con (9.228) se consigue (9.217).

Ahora, restando a (9.227) el producto de  $(l+1)$  con (9.216) se consigue

$$u\frac{dP_l(u)}{du} - lP_l(u) - \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (9.229)$$

Sumando este resultado con (9.217) se llega a la cuarta identidad (9.218).

Si en (9.217) cambiamos  $l$  por  $l-1$  se encuentra

$$\frac{dP_l(u)}{du} - u\frac{dP_{l-1}(u)}{du} - lP_{l-1}(u) = 0. \quad (9.230)$$

Además, de (9.229) tenemos

$$\frac{dP_{l-1}(u)}{du} = u\frac{dP_l(u)}{du} - lP_l(u). \quad (9.231)$$

Sustituyendo este resultado en (9.230) se obtiene la identidad (9.219).

Todas estas identidades son de gran utilidad.

## 9.15. Relación de completez de los armónicos esféricos

Hemos demostrado que las funciones propias de los operadores  $L_z$  y  $L^2$  son los armónicos esféricos  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . Esta es una base ortonormal, por lo tanto cualquier otra función  $F(\theta, \varphi)$  se puede escribir como combinación lineal de esa base. Es decir,

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (9.232)$$

Ocupando las relaciones de ortonormalidad (9.129) se encuentra

$$C_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) F(\theta, \varphi). \quad (9.233)$$

Note que sustituyendo  $C_{lm}$  en (9.232) y haciendo el cambio de variable  $u' = \cos \theta'$ ,  $u = \cos \theta$  se llega a

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \left( \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') F(\theta', \varphi') \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \int d\Omega' F(\theta', \varphi') \left( \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} d\theta' \sin \theta' F(\theta', \varphi') \left( \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 du' F(u', \varphi') \left( \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(u', \varphi') Y_{lm}(u, \varphi) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, lo que está dentro del paréntesis debe ser igual a  $\delta(\varphi - \varphi')\delta(u - u')$ , es decir,

$$\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (9.234)$$

A esta igualdad se le llama relación de completez.

## 9.16. Teorema de adición de los armónicos esféricos

Ahora veremos un resultado de los armónicos esféricos que tiene bastantes aplicaciones.

Anteriormente vimos que las funciones rotan con el operador  $U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$ , con  $\vec{\alpha}$  un vector constante. Por lo que si tenemos una función  $f(\vec{r})$ , la función rotada es  $f(\vec{r}') = U(\vec{\alpha})e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}f(\vec{r})$ . Ahora, si tenemos el operador lineal  $\hat{A}$  tal que

$$\hat{A}f(\vec{r}) = g(\vec{r}), \quad (9.235)$$

con  $g(\vec{r})$  una función. Además, como

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})f(\vec{r}) = U(-\vec{\alpha})f(\vec{r}'), \\ g(\vec{r}) &= U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})g(\vec{r}) = U(-\vec{\alpha})g(\vec{r}'), \end{aligned}$$

se encuentra

$$\hat{A}f(\vec{r}) = \hat{A}U(-\vec{\alpha})f(\vec{r}') = U(-\vec{\alpha})g(\vec{r}') \quad (9.236)$$

que implica

$$\hat{A}'f(\vec{r}') = g(\vec{r}'), \quad \hat{A}' = U(\vec{\alpha})\hat{A}U(-\vec{\alpha}), \quad (9.237)$$

al operador  $\hat{A}'$  le llamaremos operador rotado.

Considerando que  $L^2$ , conmuta con  $\vec{L}$ , se tiene

$$\begin{aligned} L'^2 &= U(\vec{\alpha})L^2U(-\vec{\alpha}) = U(\vec{\alpha})L^2U(-\vec{\alpha})L^2 = L^2, \\ L'_z &= U(\vec{\alpha})L_zU(-\vec{\alpha}). \end{aligned}$$

Es claro que en términos de los ángulos una rotación hace la transformación

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (\theta', \varphi'). \quad (9.238)$$

En particular para los armónicos esféricos se tiene  $Y_{lm}(\theta', \varphi') = U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . También es claro que una rotación no cambia las reglas de ortonormalidad en el sistema de referencia la variables  $(\theta', \varphi')$ , pues ocupando las propiedades de producto escalar y las reglas de ortonormalidad (9.129) se tiene

$$\begin{aligned} &< Y_{lm}(\theta', \varphi') | Y_{l'm'}(\theta', \varphi') > = < U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) | U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) > \\ &= < Y_{lm}(\theta, \varphi) | U^\dagger(\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) > \\ &= < Y_{lm}(\theta, \varphi) | U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) > \\ &= < Y_{lm}(\theta, \varphi) | Y_{l'm'}(\theta, \varphi) > = \delta_{mm'}\delta_{ll'}. \end{aligned} \quad (9.239)$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} L'^2 Y_{lm}(\theta', \varphi') &= U(\vec{\alpha})L^2U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(\vec{\alpha})L^2Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= U(\vec{\alpha})l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta', \varphi'), \\ L'_z Y_{lm}(\theta', \varphi') &= U(\vec{\alpha})L_zU(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(\vec{\alpha})L_zY_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= mU(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = mY_{lm}(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (9.240)$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones  $Y_{lm}(\theta', \varphi')$  forman una base de funciones y cualquier función  $G(\theta', \varphi')$  se puede escribir en términos de ella

$$G(\theta', \varphi') = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (9.241)$$

Tomando en cuenta que  $\vec{\alpha}$  es un vector constante, la función  $Y_{lm}(\theta', \varphi') = U(\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$  se puede ver como una función que depende de las variables  $(\theta, \varphi)$  por lo que se puede poder expresar como una serie de armónicos esféricos que dependen de  $(\theta, \varphi)$

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{l' \geq 0} \sum_{m'=-l'}^{m'=l'} C_{lm l' m'} Y_{l' m'}(\theta, \varphi). \quad (9.242)$$

Pero como se debe cumplir (9.240) en esta serie sólo contribuyen los términos que tienen  $l' = l$ , por lo que

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} Y_{lm'}(\theta, \varphi), \quad (9.243)$$

con

$$C_{lmm'} = \langle Y_{lm'}(\theta, \varphi) | Y_{lm}(\theta', \varphi') \rangle. \quad (9.244)$$

Ahora, si inicialmente el vector  $\vec{r}$  está en el eje  $z$ , es decir  $\theta = 0$ , y se hace una rotación con el ángulo  $\vec{\alpha}$ , es claro que el ángulo final es  $\vec{\alpha} = (\theta', \varphi')$ . Además

$$Y_{lm}(\theta = 0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (9.245)$$

Entonces si  $\theta = 0$ , de (9.243) se tiene

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\vec{\alpha}) &= Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} Y_{lm'}(\theta = 0, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m'0} \\ &= C_{lm0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \end{aligned}$$

es decir

$$C_{lm0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\vec{\alpha}). \quad (9.246)$$



De forma analoga, como  $\vec{\alpha}$  es un vector constante, la función  $Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(-\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta', \varphi')$  se puede ver como una función que depende de las variables  $(\theta', \varphi')$  por lo que se puede expresar como una serie de armónicos esféricos que dependen de  $(\theta', \varphi')$ . Considerando que se debe cumplir  $L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)$  se tiene

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} D_{lm m'} Y_{lm'}(\theta', \varphi'), \quad (9.247)$$

con

$$D_{lm m'} = \langle Y_{lm'}(\theta', \varphi') | Y_{lm}(\theta, \varphi) \rangle. \quad (9.248)$$

Apelando a las propiedades del producto escalar se encuentra

$$\begin{aligned} C_{lm m'}^* &= (\langle Y_{lm'}(\theta, \varphi) | Y_{lm}(\theta', \varphi') \rangle)^* = \langle Y_{lm}(\theta', \varphi') | Y_{lm'}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= D_{lm' m}, \end{aligned} \quad (9.249)$$

que se puede escribir como

$$D_{lm m'} = C_{lm' m}^*. \quad (9.250)$$

Por lo tanto,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lm' m}^* Y_{lm'}(\theta', \varphi'), \quad (9.251)$$

En particular, para  $m = 0$ , considerando (9.246), se llega a

$$\begin{aligned} Y_{l0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lm'0}^* Y_{lm'}(\theta', \varphi') \\ &= \sum_{m'=-l}^{m'=l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm'}^*(\vec{\alpha}) Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (9.252)$$

De donde

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (9.253)$$

Es resultado se puede escribir de una forma diferente. Note que al hacer la rotación de un vector de ángulos  $(\theta, \varphi)$  a otro de ángulos  $(\theta', \varphi')$  se está haciendo

una rotación al ángulo  $\vec{\alpha}$  que hacen los dos vectores. Podemos ver al sistema como compuesto por tres vectores, el eje  $z$ , el vector de ángulos  $P_1 : (\theta, \varphi)$  y el vector de ángulos  $P_2 : (\theta', \varphi')$ . En este sistema hemos obtenido el resultado (9.253). Ahora, consideremos el sistema  $\tilde{S}$  el cual tiene como eje  $\tilde{z}$  el vector que está en  $P_1$ , en ese sistema el eje  $z$  está en los ángulos  $(\theta, \varphi)$  y el vector  $P_2$  está en el ángulo  $\vec{\alpha}$ . Así, en el sistema  $\tilde{S}$  se tiene el vector con los ángulos  $\tilde{P}_1 = z : (\theta, \varphi)$  y el vector con los ángulos  $\tilde{P}_2 = P_2 : (\vec{\alpha})$ , claramente para pasar del vector  $\tilde{P}_2$  al  $\tilde{P}_1$  se debe hacer una rotación con los ángulos  $(\theta', \varphi')$ . Por lo tanto, en este sistema la igualdad (9.253) toma la forma

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (9.254)$$

A este resultado se le llama teorema de adición de los armónicos esféricos.

El ángulo  $\alpha$  puede ser bastante complicado, por ejemplo supongamos que tenemos los vectores

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= r_1(\cos \varphi_1 \sin \theta_1, \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \cos \theta_1), \\ \vec{r}_2 &= r_2(\cos \varphi_2 \sin \theta_2, \sin \varphi_2 \sin \theta_2, \cos \theta_2). \end{aligned} \quad (9.255)$$

Entonces el ángulo que forman está dado por

$$\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \cos \alpha = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2. \quad (9.256)$$

De donde, el teorema de adición de los armónicos esféricos nos dice

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1). \quad (9.257)$$

### 9.16.1. Implicaciones del Teorema de adición

El teorema de adición de los armónicos esféricos tiene bastantes aplicaciones, por ejemplo si  $\theta = \theta_1 = \theta_2$  y  $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ , (9.257) toma la forma

$$\sum_{m=-l}^{m=l} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (9.258)$$

que se le llama regla de suma de los armónicos esféricos.

Note que introduciendo (9.257) en la relación de completez se encuentra

$$\delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l \geq 0} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos \gamma). \quad (9.259)$$

Además, considerando que la delta de Dirac en coordenadas esféricas es

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \quad (9.260)$$

se llega al resultado

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l \geq 0} \frac{\delta(r - r')}{r^2} P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'). \quad (9.261)$$

Otra aplicación se encuentra en la función

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha + r_2^2}} \quad (9.262)$$

con  $\alpha$  el ángulo entre  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  que satisface (9.256). Ahora, si  $r_1 \neq r_2$  definamos  $r_< = \min\{r_1, r_2\}$  y  $r_> = \max\{r_1, r_2\}$ , es claro que

$$\left(\frac{r_<}{r_>}\right) < 1. \quad (9.263)$$

Entonces, considerando estas definiciones y la función generatriz (9.210) con  $z = r_</r_>$  y  $u = \cos \alpha$ , se tiene

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{r_> \sqrt{1 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \frac{1}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \alpha).$$

Así, usando el teorema de adición de los armónicos esféricos (9.257), tenemos

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} 4\pi \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1), \quad (9.264)$$

que es función de Green de la ecuación de Poisson en términos de los armónicos esféricos.

## 9.17. $L^2$ y el Laplaciano

El espectro de  $L^2$  es de vital importancia para la mecánica cuántica y la electrostática, pues este operador se está relacionado con el Laplaciano. En efecto, ocupando las propiedades de el tensor de Levi-Civita se tiene

$$\begin{aligned}
 L^2 &= L_i L_i = (\epsilon_{ijk} x_j p_k) (\epsilon_{ilm} x_l p_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} x_j p_k x_l p_m \\
 &= \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm} x_j (x_l p_k - i \delta_{lk}) p_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (x_j x_l p_k p_m - i x_j \delta_{lk} p_m) \\
 &= \delta_{jl} \delta_{km} x_j x_l p_k p_m - \delta_{jm} \delta_{kl} x_j x_l p_k p_m - i \delta_{jl} \delta_{km} x_j \delta_{lk} p_m + \delta_{jm} \delta_{kl} x_j \delta_{lk} p_m \\
 &= x_j x_j p_k p_k - x_m x_l p_l p_m - i x_k p_k + i \delta_{kk} x_l p_l \\
 &= (\vec{r})^2 (\vec{p})^2 - x_m \vec{r} \cdot \vec{p} p_m - i \vec{r} \cdot \vec{p} + 3i \vec{r} \cdot \vec{p}.
 \end{aligned} \tag{9.265}$$

Además, como

$$\begin{aligned}
 x_m \vec{r} \cdot \vec{p} p_m &= x_m x_l p_l p_m = x_m x_l p_m p_l = x_m (p_m x_l + i \delta_{ml}) p_l \\
 &= x_m p_m x_l p_l + i x_m \delta_{ml} p_l = (\vec{r} \cdot \vec{p}) (\vec{r} \cdot \vec{p}) + i (\vec{r} \cdot \vec{p}).
 \end{aligned} \tag{9.266}$$

Por lo tanto

$$L^2 = (\vec{r})^2 (\vec{p})^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 + i \vec{r} \cdot \vec{p}. \tag{9.267}$$

Considerando que  $\vec{p} = i \vec{\nabla}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 (\vec{p})^2 &= -\nabla^2 = \frac{1}{r^2} ((\vec{r} \cdot \vec{p})^2 - i \vec{r} \cdot \vec{p} + L^2) \\
 &= \frac{1}{r^2} \left( (-i \vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 - i (-i \vec{r} \cdot \vec{\nabla}) + L^2 \right),
 \end{aligned} \tag{9.268}$$

es decir,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left( (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) - L^2 \right). \tag{9.269}$$

En particular, tomando  $\vec{\nabla}$  en coordenadas esféricas, se tiene

$$\frac{1}{r^2} \left( (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \right) = \frac{1}{r^2} \left( \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \tag{9.270}$$

Por lo tanto,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2. \tag{9.271}$$

Posteriormente ocuparemos este resultado para atacar problemas de electrostática y mecánica cuántica.

## 9.18. Paridad

La transformación de paridad está definida por

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z). \quad (9.272)$$

Se puede probar que en coordenadas esféricas estas transformaciones toman la forma

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \varphi). \quad (9.273)$$

Considerando la definición de los armónicos esféricos (??), se encuentra

$$Y_{lm}(r, \pi - \theta, \pi + \varphi) = (-)^l Y_{lm}(r, \theta, \varphi). \quad (9.274)$$

**hacer a la izquierda varias ecuaciones**

## Capítulo 10

### Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

Con los resultado del capítulo anterior podemos resolver una gran cantidad de problemas. En particular, podemos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{L^2 \phi}{r^2} = 0. \quad (10.1)$$

Propondremos como solución a  $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , de donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r)L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r)l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \\ &= \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - R(r)l(l+1) \right) = 0, \end{aligned} \quad (10.2)$$

por lo que  $R(r)$  debe satisfacer

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - R(r)l(l+1) = 0. \quad (10.3)$$

Para resolver esta ecuación haremos la propuesta  $R(r) = a_\alpha r^\alpha$ , entonces

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dr^\alpha}{dr} \right) = \alpha \frac{d}{dr} (r^2 r^{\alpha-1}) = \alpha \frac{d}{dr} (r^{\alpha+1}) = \alpha(\alpha+1)r^\alpha, \quad (10.4)$$

sustituyendo este resultado en (10.3) se encuentra

$$r^\alpha(\alpha(\alpha+1) - l(l+1)) = 0, \quad (10.5)$$

es decir

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha + 1) - l(l + 1) &= \alpha^2 - l^2 + \alpha - l = (\alpha + l)(\alpha - l) + (\alpha - l) \\ &= (\alpha + l + 1)(\alpha - l) = 0,\end{aligned}\quad (10.6)$$

entonces, las soluciones para  $R(r)$  son  $r^l$  y  $r^{-(l+1)}$ . En general las soluciones radiales son

$$R(r) = A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}, \quad A_{lm}, B_{lm} = \text{cte.} \quad (10.7)$$

Así, las soluciones completas son de la forma

$$\phi_{lm}(r, \theta, \varphi) = \left( A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (10.8)$$

y la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.9)$$

Este resultado tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, las leyes de la electrostática nos dicen que el campo eléctrico,  $\vec{E}$ , satisface las leyes

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= 4\pi\rho(\vec{r}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0.\end{aligned}\quad (10.10)$$

La primera ley es la llamada ley de Gauss y establece la relación entre el campo eléctrico y la densidad de carga  $\rho$ . La segunda ley establece que existe una función  $\phi$  tal que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , por lo que la ley de Gauss toma la forma

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad (10.11)$$

esta es la llamada ecuación de Poisson. Note que  $\rho(\vec{r})$  solo es diferente de cero donde hay carga, fuera de la región donde hay carga se tiene  $\rho(\vec{r}) = 0$ . Por lo tanto la ecuación de Poisson (10.11) se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0, \quad (10.12)$$

cuya solución en coordenadas esféricas es (10.9).

### 10.0.1. Problema de la esfera

Supongamos que tenemos un sistema que consta de una esfera de radio  $R$  que está al potencial  $V(\theta, \varphi)$  en su frontera y que el potencial es finito en cualquier punto del espacio. El problema consiste en calcular el potencial en todo el espacio, tanto dentro como fuera de la esfera.

En el interior de la esfera el potencial (10.9) debe ser finito, esto implica que si  $r < R$  los coeficientes  $B_{lm}$  deben ser nulos, de lo contrario el potencial diverge en el origen. Si  $r > R$  los coeficientes  $A_{lm}$  deben ser nulos, de lo contrario el potencial diverge en infinito. Dividiremos el potencial en dos partes, en el interior,  $r < R$ ,

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

y en el exterior,  $r > R$ ,

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l B_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

En la frontera se debe cumplir que  $\phi_{int}(R, \theta, \varphi) = \phi_{ext}(R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi)$ , de donde

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (10.13)$$

es decir  $A_{lm} = B_{lm}$  y

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (10.14)$$

por lo que

$$A_{lm} = \langle Y_{lm}(\theta, \varphi) | V(\theta, \varphi) \rangle = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) V(\theta, \varphi). \quad (10.15)$$

Así, el potencial del problema es

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R}\right)^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (10.16)$$

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.17)$$

con  $A_{lm}$  dado por (10.15).



### 10.0.2. Fórmula de Poisson

Por otros métodos se puede mostrar que la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con la condición de borde

$$\phi(r = R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi) \quad (10.18)$$

es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mp \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \quad (10.19)$$

esta es la llamada fórmula de Poisson en tres dimensiones. Donde  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}' = R\hat{e}_{r'}$  y

$$\begin{aligned} \int d\Omega' &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta', \\ \cos \alpha &= \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta' \cos \theta, \end{aligned}$$

el signo superior  $(-)$  corresponde al caso  $r > R$  y el signo  $(+)$  corresponde al caso  $r < R$ .

Mostrar que esta solución es consistente con las soluciones (10.16) y (10.17).

Note que

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \mp \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \frac{R(R - r \cos \alpha) - r(r - R \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \left( \frac{R(R - r \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r(r - R \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') (-) \left( R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right. \\ &\quad \left. - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) \\ &= (\pm) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) \\ &= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Definiendo  $r_> = \text{menor}\{r, R\}$ ,  $r_< = \text{mayor}\{r, R\}$  y considerado la función generatriz de los polinomios de Legendre, junto con el teorema de adición de los armónico esféricos se llega a

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta, \varphi) &= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{\sqrt{r_<^2 + r_>^2 - 2r_<r_>\cos\alpha}} \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{r_> \sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos\alpha}} \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \frac{1}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\alpha) \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \\
&\quad \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
&= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{(\pm)R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
&\quad \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') V(\theta', \varphi') \\
&= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{(\pm)R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \right) A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (10.20)
\end{aligned}$$

con

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) V(\theta, \varphi).$$

Ahora, si  $r < R$  se tiene se debe tomar el signo  $(-)$  en (10.20), en ese caso

$$\begin{aligned}
\frac{(-)R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \right) &= \frac{(-)R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{r^l}{R^{l+1}} \right) \\
&= \frac{(-)R}{2l+1} \frac{(-)(2l+1)r^l}{R^{l+1}} = \left( \frac{r}{R} \right)^l,
\end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en (10.20) se llega a

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left( \frac{r}{R} \right)^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

que coincide con (10.16).

Para  $R < r$  se debe tomar el signo (+) en (10.20), en ese caso

$$\begin{aligned} \frac{R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \right) &= \frac{R}{2l+1} \left( R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{R^l}{r^{l+1}} \right) \\ &= \frac{R}{2l+1} \frac{(2l+1)R^l}{r^{l+1}} = \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1}, \end{aligned}$$

sustituyendo en (10.20) se llega a

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left( \frac{r}{R} \right)^{l+1} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

que coincide con (10.17).

Por lo tanto, la fórmula de Poisson (10.19) es la solución de la ecuación de Laplace con la condición de borde (10.18)

### 10.0.3. Esfera partida

Supongamos que tenemos una esfera de radio  $R$  cuyo potencial en su frontera es

$$V(\theta) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (10.21)$$

y es finito en todo el espacio, determinar el potencial en todo el espacio. En este caso los potenciales están dados por (10.16) y (10.17), solo basta determinar los coeficientes  $A_{lm}$ .

Claramente, el sistema es invariante bajo rotaciones sobre el eje  $z$ , por lo que el potencial no puede depender de  $\varphi$ . Esto implica que si  $m \neq 0$  los coeficientes  $A_{lm}$  son nulos. Los coeficientes no nulos son

$$\begin{aligned} A_{l0} = A_l &= \langle Y_{l0}(\theta, \varphi) | V(\theta) \rangle = \int d\Omega Y_{l0}^*(\theta, \varphi) V(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta Y_{l0}^*(\theta, \varphi) V(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) V(\theta) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Con el cambio de variable  $u = \cos \theta$  se tiene

$$V(u) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq u \leq 1 \\ -V_0 & -1 < u \leq 0 \end{cases} \quad (10.23)$$

y

$$A_l = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^1 du P_l(u) V(u). \quad (10.24)$$

Como  $V(u)$  es impar,  $A_{2l} = 0$ . Para el caso impar se tiene

$$\begin{aligned} A_{2l+1} &= \sqrt{\pi(2(2l+1)+1)} 2 \int_0^1 du P_{2l+1}(u) V(u) \\ &= 2V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} \int_0^1 du P_{2l+1}(u). \end{aligned}$$

Considerando la identidad

$$P_{2l+1}(u) = \frac{1}{4l+3} \frac{d}{du} (P_{2(l+1)}(u) - P_{2l}(u)), \quad (10.25)$$

y los valores de los polinomios de Legendre en  $\pm 1$  y en cero se llega a

$$\begin{aligned} \int_0^1 du P_{2l+1}(u) &= \frac{1}{4l+3} (P_{2(l+1)}(u) - P_{2l}(u)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-1}{4l+3} (P_{2(l+1)}(0) - P_{2l}(0)) \\ &= \frac{-1}{4l+3} \left( \frac{(-1)^{l+1} (2(l+1))!}{2^{2(l+1)} ((l+1)!)^2} - \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \left( \frac{(2l+2)(2l+1)}{2^2 (l+1)^2} \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} + \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left( \frac{(2l+2)(2l+1)}{2^2 (l+1)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left( \frac{2(l+1)(2l+1)}{2^2 (l+1)(l+1)} + 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left( \frac{4l+3}{2(l+1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 2(l+1)}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Entonces

$$A_{2l+1} = \frac{V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} (-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 (l+1)}, \quad (10.27)$$

que implica

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{l \geq 0} A_{2l+1} Y_{2l+10}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} (-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2 (l+1)} \sqrt{\frac{(4l+3)}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3) (2l)!}{2^{2l+1} (l!)^2 (l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (10.28)$$

de donde

$$\begin{aligned} \phi_{int}(r, \theta) &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3) (2l)!}{2^{2l+1} (l!)^2 (l+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta), \\ \phi_{ext}(r, \theta) &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3) (2l)!}{2^{2l+1} (l!)^2 (l+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (10.29)$$

es el potencial en todo el espacio.

## 10.1. Esfera a potencial cero

Supongamos que tenemos un esfera a potencial cero, esto implica que debemos buscar las soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen  $\phi(R, \theta, \varphi) = 0$ . Por conveniencia tomaremos la solución general de la forma

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l + b_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.30)$$

Por lo que

$$\phi(R, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} + b_{lm}) Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

como los armónicos esféricos son un conjunto de funciones ortonormales,

$$a_{lm} = -b_{lm}. \quad (10.31)$$

Por lo tanto, la solución general a este problema es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \left( \left( \frac{r}{R} \right)^l - \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.32)$$

### 10.1.1. Plano con protuberancia esférica

Como una aplicación del problema anterior, supongamos que tenemos un plano infinito que tiene una protuberancia esférica de radio  $R$  y que todo el sistema está a potencial cero, además si  $r \gg R$  el potencial tiene la forma  $\phi_\infty(r) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ .

Para resolver este problema pondremos el plano en el plano  $x - y$  de tal forma que el casquete de la protuberancia esté sobre el eje  $z$ . Claramente este sistema es invariante bajo rotaciones del eje  $z$ , por lo que el potencial no depende de  $\varphi$ . Además, como el potencial se debe anular sobre el casquete esférico, éste debe ser de la forma (10.32) donde los términos con  $m \neq 0$  no contribuyen. Así el potencial debe ser de la forma

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_l \left( \left( \frac{r}{R} \right)^l - \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta). \quad (10.33)$$

Ahora, el potencial se debe anular sobre el plano  $x - y$  para cualquier  $r$ . Esto equivale a pedir que el potencial se anule en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  para cualquier  $r$ . Entonces,

$$\phi \left( r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{l \geq 0} a_l \left( \left( \frac{r}{R} \right)^l - \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(0) = 0. \quad (10.34)$$

Considerando que  $P_{2l+1}(0) = 0$ , se encuentra  $a_{2l} = 0$ , que implica

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_{2l+1} \left( \left( \frac{r}{R} \right)^{2l+1} - \left( \frac{R}{r} \right)^{2(l+1)} \right) P_{2l+1}(\cos \theta). \quad (10.35)$$

Además, para el caso  $r \gg R$ , se debe cumplir

$$\phi_\infty(r) = -E_0 r \cos \theta = \phi(r \gg R, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_{2l+1} \left( \frac{r}{R} \right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \quad (10.36)$$

como  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , se llega  $a_{2l+1} = 0$  si  $l > 0$  y

$$-E_0 r \cos \theta = a_1 \frac{r}{R} \cos \theta, \quad (10.37)$$

es decir

$$a_1 = -E_0 R. \quad (10.38)$$

En consecuencia la solución al problema se puede escribir como

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \left( 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right) \cos \theta. \quad (10.39)$$

## 10.2. Problemas con simetría azimutal

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas de problemas que tienen simetría rotacional ante el eje  $z$ , es decir que no dependen de  $\varphi$ , es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta). \quad (10.40)$$

En principio se deben calcular cada uno de los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$ , sin embargo en algunos casos se puede ocupar las simetrías del problema para obtenerlos.

### 10.2.1. Esfera con condiciones especiales

Supongamos que tenemos una esfera de radio  $R$  cuyo potencial en su superficie es

$$V(\theta) = V_0 (1 + \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta), \quad V_0 = \text{cte} \quad (10.41)$$

y el potencial es finito en todo el espacio. Este problema no depende de  $\varphi$ , por lo que debemos buscar soluciones de la ecuación de Laplace de la forma (10.40) que satisfagan la condición de borde (10.41). Como el potencial es finito en todo el espacio, si  $r < R$  el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_l \left( \frac{r}{R} \right)^l P_l(\cos \theta). \quad (10.42)$$

Por la misma razón, si  $r > R$  el potencial debe escribirse como

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} b_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \theta). \quad (10.43)$$

Antes de continuar escribamos el potencial (10.41) de una forma más sugerente, como  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ , entonces

$$V(\theta) = V_0 (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta) . \quad (10.44)$$

Considerando que

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u, \quad P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \quad (10.45)$$

se encuentra

$$u^2 = \frac{2}{3}P_2(u) + \frac{1}{3}P_1(u), \quad (10.46)$$

así,

$$V(\theta) = V_0 (P_0(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) + 2P_2(\cos \theta)) . \quad (10.47)$$

Entonces, como  $V(\theta) = \phi_{int}(R, \theta) = \phi_{ext}(R, \theta)$  y los polinomios de Legendre son linealmente independientes, los únicos coeficientes diferentes son

$$a_0 = V_0, \quad , a_1 = V_0, \quad a_2 = 2V_0. \quad (10.48)$$

De donde la solución al problema es

$$\begin{aligned} \phi_{int}(r, \theta) &= V_0 \left( P_0(\cos \theta) + \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right), \\ \phi_{ext}(r, \theta) &= V_0 \left( \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + \left( \frac{R}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

### 10.2.2. Potencial de un anillo circular

Supongamos que tenemos un anillo circular de radio  $R$  con densidad de carga constante  $\lambda$ , paralelo al plano  $x - y$  y que está a una altura  $h$  del origen. Este sistema es invariante bajo rotaciones del eje  $z$ , por lo que no depende de  $\varphi$  y su potencial debe ser de la forma (10.40). Note que los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  no depende de la posición, por lo que si los calculamos en un punto o sobre un eje los habremos calculado para todo el espacio.

Primero calculemos el potencial para un punto que esté sobre el eje  $z$ , es decir  $\theta = 0$ , note que esto implica que  $r = z$ . Ahora, un elemento de carga del



anillo,  $dq = \lambda R d\varphi$ , que está en la posición  $\vec{r}_q = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h)$  contribuye con el potencial

$$d\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{dq}{|z\hat{k} - \vec{r}_q|} = \frac{\lambda R d\varphi}{\sqrt{R^2 + (z - h)^2}} = \frac{\lambda R d\varphi}{\sqrt{R^2 + h^2 + z^2 - 2hz}}$$

de donde

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + h^2 + z^2 - 2hz}}.$$

Este potencial se puede poner de forma más sugerente. En efecto, si  $\alpha$  es el ángulo que hace el eje  $z$  con un vector que une el origen y un punto del anillo, entonces  $R = c \sin \alpha$  y  $h = c \cos \alpha$ , con  $c = \sqrt{R^2 + h^2}$ . Por lo que,

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{c^2 + z^2 - 2cz \cos \alpha}}.$$

Si definimos a  $r_< = \text{menor}\{r, c\}$  y  $r_> = \text{mayor}\{r, c\}$  se llega a

$$\begin{aligned} \phi(r = z, \theta = 0) &= \frac{2\pi\lambda R}{r_> \sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right) \cos \alpha}} \\ &= \frac{2\pi\lambda R}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Si  $r < c$  se tiene

$$\phi_{int}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{r^l}{c^{l+1}}, \quad (10.50)$$

para el caso  $r > c$  se llega a

$$\phi_{ext}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{c^l}{r^{l+1}}. \quad (10.51)$$

Para obtener el potencial en todo el espacio consideremos la solución general (10.40). Si  $r \rightarrow \infty$ , entonces  $r^l$  diverge por lo que en ese caso, que corresponde a  $r > c$ , se debe cumplir que  $A_l = 0$ . En particular sobre el eje  $z$ , es decir  $\theta = 0$ , como  $P_l(1) = 1$ , se tiene

$$\phi_{ext}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} B_l r^{-(l+1)}. \quad (10.52)$$

Igualando esta solución con (10.51) se llega a  $B_l = 2\pi\lambda R c^l P_l(\cos \alpha)$ . Por lo que, si  $r > c$ , la solución es

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\lambda R c^l P_l(\cos \alpha)}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (10.53)$$

Para el caso  $r < c$ , si  $r \rightarrow 0$ , entonces  $r^{-(l+1)}$  diverge y se debe tomar  $B_l = 0$ . En particular sobre el eje  $z$ , es decir  $\theta = 0$ , se consigue

$$\phi_{int}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l. \quad (10.54)$$

Igualando esta solución con (10.50) se encuentra  $A_l = \frac{2\pi\lambda R}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha)$ . De donde, si  $r > c$ , la solución es

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha)}{c^{l+1}} r^l P_l(\cos \theta). \quad (10.55)$$

Claramente la solución en todo el espacio es

$$\phi(r, \theta) = 2\pi\lambda R \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta). \quad (10.56)$$

### 10.2.3. Esfera con hueco

Veamos otro problema que se puede resolver con el método empleado en el ejemplo anterior. Supongamos que tenemos una esfera conductora de radio  $R$  con un hueco definido por el cono  $\theta = \alpha$  y que tiene densidad superficial de carga constante  $\sigma$ .

Pondremos el origen de coordenadas en el centro de la esfera de tal forma que el eje del cono coincida con el eje  $z$ . Este problema no depende de  $\varphi$ , por lo que el potencial es de la forma (10.40). Como en el caso del anillo, primero calcularemos el potencial sobre el eje  $z$ . Un elemento de carga está dado por  $dq = \sigma da = \sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ , si tiene la posición  $\vec{r}' = R\hat{e}_{r'}$ , entonces contribuye con el potencial

$$\begin{aligned} d\phi(r = z, \theta = 0) &= \frac{dq}{|z\hat{k} - R\hat{e}_{r'}|} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz\hat{k} \cdot \hat{e}_{r'}}} \\ &= \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{r_{>} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \theta'} \end{aligned}$$

donde  $r_{>} = \text{mayor}\{r, R\}$  y  $r_{<} = \text{menor}\{r, R\}$ . Por lo que

$$d\phi(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta') \sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (10.57)$$

así el potencial total sobre un punto en el eje  $z$  es

$$\begin{aligned} \phi(r = z, \theta = 0) &= \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} d\phi(r = z, \theta = 0) \\ &= \sigma R^2 \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\alpha}^{\pi} P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi \sigma R^2 \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_{\alpha}^{\pi} P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable  $x = \cos \theta'$  y considerando las propiedades

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} (P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)), \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad (10.58)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\pi} P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= - \int_{\cos \alpha}^{-1} P_l(x) dx \\ &= \int_{-1}^{\cos \alpha} \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} (P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)) dx \\ &= \frac{1}{2l+1} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)), \end{aligned}$$

de donde

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi \sigma R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)) \quad (10.59)$$

Ahora, tomando en cuenta la solución general (10.40), el potencial en todo el espacio es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi \sigma R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)) P_l(\cos \theta). \quad (10.60)$$

### 10.3. Disco a potencial constante

Supongamos que tenemos un disco de radio  $R$  que está en el plano  $x - y$  centrado en el origen y que tiene potencial constante  $V$ . Con la información de que en el disco el campo eléctrico es proporcional a

$$\frac{4\pi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad (10.61)$$

calcular el potencial si  $R < r$ .

Como el sistema es invariante bajo rotaciones en el eje  $z$ , el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \theta). \quad (10.62)$$

Antes de calcular  $A_l$  note que, como el potencial es constante en el disco, el campo eléctrico,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , debe ser perpendicular a este. Ahora, si es  $\alpha$  una constante de proporcionalidad, ocupando la función generatriz de los polinomios de Legendre se llega a que el campo eléctrico en el disco es

$$E = \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{4\pi\alpha}{R\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}} = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l \left( \frac{\rho}{R} \right)^{2l} P_{2l}(0). \quad (10.63)$$

En el borde del disco, se tiene

$$\vec{E} = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho, \quad e_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (10.64)$$

con  $\hat{e}_\rho$  el vector normal al borde del disco.

Ocupando de la función generatriz de los polinomios de Legendre se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sum_{l \geq 0} (-)^l \beta^{2l} P_{2l}(0). \quad (10.65)$$

Además es claro que con el cambio de variable  $\beta = \cos \gamma$  se encuentra

$$\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad (10.66)$$

por lo que

$$\int_0^1 d\beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int_0^1 d\beta \sum_{l \geq 0} (-)^l \beta^{2l} P_{2l}(0) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} P_{2l}(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (10.67)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= -\vec{\nabla} \phi(r, \theta) = - \sum_{l \geq 0} \left( \frac{-A_l(l+1)R^{l+1}}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) \hat{e}_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} A_l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta \right). \end{aligned}$$

Con el cambio de variable  $u = \cos \theta$  se tiene

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP_l(u)}{du} = -\sin \theta \left( u \frac{dP_{l-1}(u)}{du} + l P_{l-1}(u) \right), \quad (10.68)$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= \sum_{l \geq 0} \frac{A_l}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \left[ (l+1) P_l(\cos \theta) \hat{e}_r \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \left( u \frac{dP_{l-1}(u)}{du} + l P_{l-1}(u) \right) \hat{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

En el plano  $x - y$ , es decir  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se tiene

$$\begin{aligned} \hat{e}_r|_{\frac{\pi}{2}} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \hat{e}_\rho, \\ \hat{e}_\theta|_{\frac{\pi}{2}} &= (0, 0, -1) = -\hat{k}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{E} \left( R, \theta = \frac{\pi}{2} \right) &= \sum_{l \geq 0} \frac{A_l}{R} \left[ (l+1) P_l(0) \hat{e}_\rho - l P_{l-1}(0) \hat{k} \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho, \end{aligned} \quad (10.69)$$

que implica

$$\sum_{l \geq 0} -\frac{A_l}{R} l P_{l-1}(0) \hat{k} = 0, \quad (10.70)$$

de donde

$$A_{2l+1} = 0. \quad (10.71)$$

Entonces la igualdad (10.69) toma la forma

$$\vec{E}\left(R, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{l \geq 0} \frac{A_{2l}}{R} (2l+1) P_{2l}(0) \hat{e}_\rho = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho,$$

que induce

$$A_{2l} = \frac{(-)^l 4\pi\alpha}{2l+1}. \quad (10.72)$$

Así el potencial exterior tiene la forma

$$\phi_{ext}(r, \theta) = 4\pi\alpha \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta), \quad (10.73)$$

este potencial debe satisfacer la condición de borde

$$\phi(R, \theta) = 4\pi\alpha \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} P_{2l}(0) = V, \quad (10.74)$$

considerando (10.67) se llega

$$\alpha = \frac{V}{2\pi^2}. \quad (10.75)$$

Por lo tanto

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta). \quad (10.76)$$

## 10.4. Distribución de carga continua

Supongamos que se tiene una partícula puntual de carga  $q$  en la posición  $\vec{r}'$ , entonces según las leyes de la electrostática el potencial eléctrico en el punto  $\vec{r}$  está dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10.77)$$

Ahora, si se tiene una densidad de carga  $\rho(\vec{r})$  en un volumen,  $V$ , cada elemento de carga  $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')d\vec{r}'$  contribuye al potencial en el punto  $\vec{r}$  con

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (10.78)$$

por lo tanto, el potencial total en el punto  $\vec{r}$  es

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10.79)$$

Sea  $\alpha$  el ángulo entre los vectores

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \vec{r}' = r'(\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta')$$

también definamos  $r_{<} = \text{menor}\{r, r'\}$ ,  $r_{>} = \text{mayor}\{r, r'\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{r_{>}^2 + r_{<}^2 - 2r_{<}r_{>} \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{r_{<} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha}} = \frac{1}{r_{<}} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l P_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left( \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} \int d\vec{r}' \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (10.80) \end{aligned}$$

En particular para el potencial exterior,  $R < r$ , se tiene

$$\phi_{ext}(\vec{r}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

con

$$Q_{lm} = \int d\vec{r}' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (10.81)$$

Si  $r < r'$ , se llega a

$$\phi_{ext}(\vec{r}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} r^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

con

$$q_{lm} = \int d\vec{r}' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (10.82)$$

Entonces, el potencial de cualquier distribución de carga continua se puede expresar en términos de armónicos esféricos.

### 10.4.1. Esfera cargada

Ahora veamos un problema sencillo que involucre calcular los coeficientes  $Q_{lm}$  y  $q_{lm}$ .

En cuenta el potencial eléctrico de una esfera de radio  $R$  que en la superficie tiene la distribución de carga

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta, \quad \sigma_0 = \text{constante}. \quad (10.83)$$

Como solo hay carga en el radio  $R$ , la distrución de carga se puede escribir como

$$\rho(\vec{r}) = \delta(r - R) \sigma_0 \cos \theta. \quad (10.84)$$

Además considerando

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1(\cos \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (10.85)$$

se encuentra

$$\rho(\vec{r}) = \delta(r - R) \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi). \quad (10.86)$$

Introduciendo este resultado en (10.81) y (10.82)

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int d\vec{r}' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta(r' - R) \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') \\ &= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int dr' r'^2 r'^l \delta(r' - R) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{10}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^{l+2} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^3 \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0}, \\
q_{lm} &= \int d\vec{r}' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') \\
&= \int dr' r'^2 \int d\Omega' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta(r' - R) \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{R^{l-1}} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0}.
\end{aligned}$$

Es decir, los únicos coeficientes  $Q_{lm}$  y  $q_{lm}$  diferentes de cero son

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^3 \sigma_0, \quad q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma_0.$$

Por lo que los potenciales son

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \frac{4\pi}{3} \frac{Q_{10} Y_{10}(\theta, \varphi)}{r^2}, \quad \phi_{int}(r, \theta) = \frac{4\pi}{3} r q_{10} Y_{10}(\theta, \varphi),$$

es decir

$$\begin{aligned}
\phi_{ext}(r, \theta) &= \frac{4\pi R^3 \sigma_0 \cos \theta}{3 r^2}, \\
\phi_{int}(r, \theta) &= \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos \theta = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 z.
\end{aligned} \tag{10.87}$$

## 10.5. Problemas en Magnetismo

Las leyes de la magnetostática nos dicen que si tenemos una densidad de corriente,  $\vec{J}$ , se produce un campo magnético  $\vec{B}$  que satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \tag{10.88}$$

La densidad de corrientes se define como  $\vec{J} = \rho(\vec{r}) \vec{V}(\vec{r})$ . Donde  $\rho(\vec{r})$  es la densidad de carga y  $\vec{V}(\vec{r})$  es la velocidad de las partículas cargadas.

La primera ecuación implica que existe una función  $\vec{A}$  tal que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Se puede mostrar que  $\vec{A}$  en términos de la corriente está dada por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{10.89}$$

En la siguientes secciones veremos dos ejercicios relacionados con este tema.

### 10.5.1. Esfera rotante

Supongamos que tenemos una esfera de radio  $R$  con densidad de carga superficial constante  $\sigma_0$ , si la esfera rota con velocidad constante  $\omega$ , encuentre el potencial vectorial y el campo magnético.

Como solo hay carga en la superficie de la esfera, la densidad de carga es

$$\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \delta(r - R). \quad (10.90)$$

Supongamos que el eje de rotación está en eje  $z$ , entonces la velocidad de un punto de la esfera es

$$\vec{V} = R \sin \theta \omega \hat{e}_\varphi \quad (10.91)$$

Además, sabemos que cualquier vector en dos dimensiones  $(x, y)$  se puede escribir como el número complejo  $z = x + iy$ , en particular  $\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  se puede escribir como

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ie^{i\varphi}, \quad (10.92)$$

entonces

$$\vec{V} = iR\omega \sin \theta e^{i\varphi}. \quad (10.93)$$

Ahora, de la definición de los armónicos esféricos se tiene

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = (-)\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad (10.94)$$

de donde

$$\vec{V} = -iR\omega \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11}(\theta, \varphi). \quad (10.95)$$

Así, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \rho \vec{V} = -iR\omega \sigma_0 \delta(r - R) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11}(\theta, \varphi), \quad (10.96)$$

entonces, si  $r_> = \text{mayor}\{R, r\}$ ,  $r_< = \text{menor}\{R, r\}$ , el potencial vectorial magnético es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{iR\omega \sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int dr' r'^2 \int d\Omega' \delta(r' - R) \frac{Y_{11}(\theta', \varphi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\int d\Omega'Y_{11}(\theta',\varphi')\sum_{l\geq 0}\sum_{m=-l}^l\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \\
&= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sum_{l\geq 0}\sum_{m=-l}^l\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)\int d\Omega'Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{11}(\theta',\varphi') \\
&= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\sum_{l\geq 0}\sum_{m=-l}^l\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)\delta_{l1}\delta_{m1} \\
&= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{4\pi}{3}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}Y_{11}(\theta,\varphi) = -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{4\pi}{3}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}(-)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} \\
&= \frac{R^3\omega\sigma_0}{c}\frac{4\pi}{3}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}\sin\theta e^{i\varphi} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3\omega}{3c}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}\sin\theta\hat{e}_\varphi. \tag{10.97}
\end{aligned}$$

Así,

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi\hat{e}_\varphi, \quad A_\varphi = \frac{4\pi\sigma_0 R^3\omega}{3c}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}\sin\theta. \tag{10.98}$$

Como  $A_\varphi$  no depende de  $\varphi$ , el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_r &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi), \\
B_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi), \\
B_\varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{10.99}$$

Por lo tanto,

$$B_r = \frac{8\pi\sigma_0 R^3\omega}{3c}\frac{r_{\leq}}{r_{>}^2}\cos\theta \tag{10.100}$$

Si  $r < R$  se tiene

$$B_{\theta(int)} = -\frac{8\pi\sigma_0 R\omega}{3c}\sin\theta, \tag{10.101}$$

mientras que si  $r > R$ , se llega a

$$B_{\theta(ext)} = \frac{4\pi\sigma_0 R^4\omega}{3cr^3}\sin\theta. \tag{10.102}$$

Note que

$$\vec{B}_{int} = B_{r(int)}\hat{e}_r + B_{\theta(int)}\hat{e}_\theta = \frac{8\pi\sigma_0 R\omega}{3c}\hat{k}, \tag{10.103}$$

es decir el campo magnético en el interior de la esfera es constante y apunta en la dirección del eje de la rotación de la esfera.

El núcleo de la tierra es metálico y tiene cierta carga, por lo que al girar produce un campo magnético. En este sentido la esfera cargada rotante es un modelo simplificado para explicar el campo magnético terrestre.

### 10.5.2. Anillo de corriente I

Ahora veamos el problema de un anillo circular de radio  $R$  por el cual circula una corriente constante  $I$ . Sin perdida de generalidad podemos suponer que el anillo está en el plano  $x - y$  y que su centro está en el origen del sistema. Para este sistema la densidad de corriente es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{R} \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{e}_\varphi. \quad (10.104)$$

Ahora, como cualquier vector en dos dimensiones,  $(x, y)$ , se puede escribir como un número complejo,  $z = x + iy$ . En particular  $\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  se puede representar como  $\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ie^{i\varphi}$ , por lo que

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{R} \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) ie^{i\varphi}. \quad (10.105)$$

Definamos  $r_> = \text{mayor}\{R, r\}$ ,  $r_< = \text{menor}\{R, r\}$ , entonces el potencial vectorial es

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{iI}{cR} \int \frac{\delta(r' - R) \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 dr' d\Omega' \\ &= \frac{iI}{cR} \int \left( \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right. \\ &\quad \left. \delta(r' - R) \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} r'^2 dr' d\Omega' \right) \\ &= \frac{iI}{cR} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} R^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} d\Omega'. \end{aligned}$$

Ocupando la definición de elemento de ángulo sólido y de los armónicos esféricos se tiene

$$\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} d\Omega' = \int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right) e^{i\varphi'}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m \left( \cos \frac{\pi}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-im\varphi'} e^{i\varphi'} \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(0) 2\pi\delta_{m1} \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(0) 2\pi\delta_{m1} \\
&= Y_{lm}^* \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) 2\pi\delta_{m1}.
\end{aligned} \tag{10.106}$$

Como  $m$  debe cumplir que  $m \leq l$ , entonces  $l \geq 1$ . Así, ocupando las propiedades de los armónicos esféricos y de los polinomios asociados de Legendre, se encuentra

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{8\pi^2 iIR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l1}(\theta, \varphi) Y_{l1}^* \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) \\
&= \frac{8\pi^2 iIR}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \left( \sqrt{\frac{(2l+1)(l-1)!}{4\pi(l+1)!}} \right)^2 P_l^1(\cos \theta) P_l^1(0) i e^{i\varphi} \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l^1(\cos \theta) P_l^1(0) \hat{e}_{\varphi} \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(2l)!}{(2l+2)!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos \theta) \frac{(-)^{l+1} (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \hat{e}_{\varphi} \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1} (2l)!}{2^{2l+1} (l+1)! l!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos \theta) \hat{e}_{\varphi}.
\end{aligned} \tag{10.107}$$

Por lo tanto, el potencial vectorial solo tiene dirección  $\hat{e}_{\varphi}$ , cuya componente es

$$A_{\varphi} = \frac{\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1} (2l)!}{2^{2l} (l+1)! l!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos \theta). \tag{10.108}$$

Como  $A_{\varphi}$  no depende de  $\varphi$ , el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_r &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\varphi}), \\
B_{\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}), \\
B_{\varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{10.109}$$

Con el cambio de variable  $u = \cos \theta$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial u}((1-u^2)^{\frac{1}{2}} A_\varphi) \quad (10.110)$$

Además, como

$$P_l^1(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{du}, \quad \frac{d}{du} \left( (1-u^2) \frac{dP_l(u)}{du} \right) + l(l+1)P_l(u) = 0,$$

se llega a

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \\ &= \frac{\pi I R}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1} (2l)!}{2^{2l} (l+1)! l!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} (2l+1)(2l+2) P_l^{21+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I R}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{21+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Para la componente  $B_\theta$ , tenemos, si  $R < r$ ,

$$B_{\theta(ext)} = \frac{\pi I}{cr} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1} (2l+1)!}{2^{2l} (l+1)! l!} \left( \frac{R}{r} \right)^{2l+2} P_l^{21+1}(\cos \theta),$$

mientras que si  $r < R$ ,

$$B_{\theta(int)} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{2l+1} P_l^{21+1}(\cos \theta).$$

### 10.5.3. Anillo de corriente II

Fuera de la región donde hay corriente eléctrica, las ecuaciones de la magnetostática son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \quad (10.111)$$

De la segunda ecuación se deduce que existe una función, que llamaremos potencial escalar magnético,  $\phi_m(\vec{r})$ , tal que

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_m(\vec{r}). \quad (10.112)$$

Al introducir esta ecuación en  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  se llega a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_m(\vec{r}) = 0, \quad (10.113)$$

cuya solución en coordenadas esféricas es (10.9).

Además, se puede mostrar que si la corriente circula por una curva cerrada el potencial escalar magnético es

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_a \frac{\hat{n}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da'. \quad (10.114)$$

Donde  $a$  es el área de la superficie que encierra la curva de corriente y  $\hat{n}$  la normal a esta superficie.

En algunos caso es más conveniente ocupar el potencial escalar magnético que el potencial vectorial. Por ejemplo, supongamos que tenemos un anillo de radio  $R$  por el cual circula una corriente constante  $I$ .

Para resolver este problema pondremos al anillo en el plano  $x - y$  y el centro del anillo en el origen del sistema de referencia. Claramente el sistema es invariante bajo rotaciones en el eje  $z$ , por lo que el potencial no depende de  $\varphi$ , es decir es de la forma

$$\phi_m(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \left( A_l \left( \frac{r}{R} \right)^l + B_l \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta). \quad (10.115)$$

Adicionalmente, los puntos del círculo que encierra al anillo de corriente son de la forma

$$\vec{r}' = r'(\cos \varphi', \sin \varphi', 0) \quad (10.116)$$

mientras que el vector normal es  $\hat{n}' = \hat{k}$  y el elemento de área es  $da' = r' dr' d\varphi'$ . De donde, para un punto  $\vec{r} = (x, y, z) = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , el potencial escalar magnético (10.114) es

$$\begin{aligned} \phi_m(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R r' dr' \frac{\hat{k} \cdot ((x, y, z) - r'(\cos \varphi', \sin \varphi', 0))}{\left( \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \right)^3}, \\ &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R dr' \frac{zr'}{\left( \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \right)^3}. \end{aligned}$$

Si  $\theta = 0$ , es decir, si el punto de observación está sobre el eje  $z$ , la integral se simplifica notablemente y se encuentra

$$\begin{aligned}
\phi_m(0, 0, z = r) &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R dr' \frac{rr'}{(\sqrt{r^2 + r'^2})^3} \\
&= \frac{2\pi Ir}{c} \int_0^R dr' \frac{r'}{(\sqrt{r^2 + r'^2})^3} = \frac{2\pi Ir}{c} \int_0^R dr' \frac{d}{dr'} \left( \frac{-1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) \\
&= \frac{2\pi Ir}{c} \left( \frac{-1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) \Big|_0^R = \frac{-2\pi Ir}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} - \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{2\pi I}{c} + \frac{-2\pi I}{c} \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}. \tag{10.117}
\end{aligned}$$

Ahora, definamos  $r_< = \text{menor}\{r, R\}$  y  $r_> = \text{mayor}\{r, R\}$ , entonces ocupando las propiedades de los polinomios de Legendre, se encuentra

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{r}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \frac{r}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(0) = \frac{r}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{2l} P_{2l}(0).$$

Por lo tanto,

$$\phi_m(0, 0, r) = \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \frac{r}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{2l} P_{2l}(0). \tag{10.118}$$

Para el caso  $r < R$  se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_{m(int)}(0, 0, r) &= \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \frac{r}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l} P_{2l}(0) + \frac{2\pi I}{c} \\
&= \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 0} \left( -\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0) \right) r^{2l+1}. \tag{10.119}
\end{aligned}$$

Mientras que si  $R < r$  se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_{m(ext)}(0, 0, r) &= \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(0) \\
&= \frac{2\pi I}{c} - \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 1} \left( -\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0) \right) \frac{1}{r^{2l}} \\
&= \sum_{l \geq 1} \left( -\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0) \right) \frac{1}{r^{2l}}. \tag{10.120}
\end{aligned}$$



Ahora, según la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, si  $r < R$  el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{m(int)}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (10.121)$$

Cuando  $\theta = 0$  la ecuación (10.121) debe ser igual a (10.119), por lo tanto considerando que  $P_l(1) = 1$ , se llega a

$$\begin{aligned} \phi_m(r, \theta = 0) &= \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(1) = \sum_{l \geq 0} A_{2l} r^{2l} P_{2l}(1) + \sum_{l \geq 0} A_{2l+1} r^{2l+1} P_{2l+1}(1) \\ &= \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 0} \left( -\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0) \right) r^{2l+1}. \end{aligned} \quad (10.122)$$

Así, los únicos coeficientes de diferentes de cero son

$$A_0 = \frac{2\pi I}{c}, \quad A_{2l+1} = -\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0). \quad (10.123)$$

entonces, si  $r < R$  se tiene el potencial

$$\phi_{m(int)}(r, \theta) = \frac{2\pi I}{c} - \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0) \left( \frac{r}{R} \right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \quad (10.124)$$

Ahora, según la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, si  $R < r$  el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{m(ext)}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (10.125)$$

Cuando  $\theta = 0$  el potencial (10.120) debe ser igual a (10.125), es decir,

$$\begin{aligned} \phi_{m(ext)}(r, \theta = 0) &= \sum_{l \geq 0} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(1) = \sum_{l \geq 0} \frac{B_{2l}}{r^{2l+1}} + \sum_{l \geq 1} \frac{B_{2l-1}}{r^{2l}} \\ &= \sum_{l \geq 1} \left( -\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0) \right) \frac{1}{r^{2l}}. \end{aligned} \quad (10.126)$$

Por lo tanto,

$$B_{2l} = 0, \quad B_{2l-1} = -\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0). \quad (10.127)$$

Entonces, si  $R < r$  se tiene el potencial

$$\begin{aligned}\phi_{m(ext)}(r, \theta) &= -\frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l-1}(\cos \theta) \\ &= -\frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2(l+1)}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta). \quad (10.128)\end{aligned}$$

Además, el campo magnético es

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_m(r, \theta) = -\left( \frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right), \quad (10.129)$$

es decir

$$B_r = -\frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial r}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad B_\varphi = 0. \quad (10.130)$$

De donde, considerando el valor de  $P_{2l}(0)$  y rearmreglando términos, se llega a

$$\begin{aligned}B_{r(int)} &= -\frac{\partial \phi_{m(int)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0)(2l+1) \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{r^{2l+1}}{R^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta),\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}B_{r(ext)} &= -\frac{\partial \phi_{m(ext)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2(l+1)}(0)(-)^{2l+1} \frac{R^{2l+2}}{r^{2l+3}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)!}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2l+2}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)! (-)^{2l+1} 2(l+1)}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)! 2(l+1) 2(l+1)}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta).\end{aligned}$$

Note que ambas componentes se pueden escribir como

$$B_r = \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{r_{<}^{2l+1}}{r_{>}^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta),$$

que coincide con los resultados de la sección anterior .

Adicionalmente, consideremos el cambio de variable  $u = \cos \theta$  en la ecuación

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP_l(u)}{du} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{du} = P_l^1(u) = P_l^1(\cos \theta),$$

por lo que se encuentra

$$\begin{aligned} B_{\theta(int)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m(int)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (10.131)$$

y

$$\begin{aligned} B_{\theta(ext)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m(ext)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} P_{2l+2}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+2}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)!}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+1)! 2(l+1)}{2^{2l+2} (l+1)! (l+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+1)!}{2^{2l} (l+1)! l!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (10.132)$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos en la sección anterior.

# Capítulo 11

## Los Polinomio de Laguerre y el Átomo de Hidrógeno

### 11.1. Átomo de Hidrógeno

La ecuación de Schrödinger para una partícula en un campo central es

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(r), \quad \hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad (11.1)$$

de donde

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi = E\psi. \quad (11.2)$$

Anteriormente vimos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger con sentido físico forman un conjunto ortonormal. Es decir, si

$$\hat{H}\psi_\lambda = E_\lambda\psi_\lambda, \quad \text{y} \quad \hat{H}\psi_{\lambda'} = E_{\lambda'}\psi_{\lambda'}, \quad (11.3)$$

entonces

$$\langle \psi_\lambda | \psi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (11.4)$$

esta propiedad es importante para el desarrollo que haremos posteriormente.

En coordenadas esféricas el operador Laplaciano es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2}, \quad (11.5)$$

$$L^2 = - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (11.6)$$

donde se cumple

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (11.7)$$

Por lo que, para resolver (11.2) propondremos  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Como la función  $R(r)$  solo depende de  $r$ , mientras que  $L^2$  y  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  solo dependen de los ángulos, se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) &= \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - R(r) \frac{L^2 Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \\ &= \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r)l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(r, \theta, \varphi) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + V(r)\psi(r, \theta, \varphi) \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} \right] + V(r)R(r) \right) \\ &= E\psi(r, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \phi)ER(r). \end{aligned}$$

Así, la ecuación a resolver es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} \right) + V(r)R(r) = ER(r), \quad (11.8)$$

como solo hay dependencia en la variable  $r$  tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) - \frac{2m}{\hbar^2} V(r)R(r) + \frac{2mE}{\hbar^2} R(r) = 0.$$

Para facilitar los cálculos haremos el cambio de variable

$$\rho = \alpha r, \quad \frac{d}{dr} = \alpha \frac{d}{d\rho}, \quad \alpha = 2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}, \quad (11.9)$$

de donde

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R(\rho) - \frac{2m}{\hbar^2 \alpha^2} V(\rho) R(\rho) - \frac{1}{4} R(\rho) = 0. \quad (11.10)$$

Supongamos que tenemos un potencial que cerca del origen a lo más diverge como  $V \approx \rho^{-1}$  y en infinito tiende a cero. Entonces cerca del origen (11.10) tiene la forma sintótica

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R(\rho) \approx 0. \quad (11.11)$$

Para resolver esta ecuación proponemos  $R(\rho) = \rho^\gamma$ , que al ser sustituida en (11.11) se encuentra

$$(\gamma(\gamma+1) - l(l+1)) \rho^\gamma = 0,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} (\gamma(\gamma+1) - l(l+1)) &= \gamma^2 - l^2 + \gamma - l = (\gamma+l)(\gamma-l) + \gamma - l \\ &= (\gamma-l)(\gamma+l+1) = 0. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Así, los posibles valores de  $\gamma$  son  $l$  y  $-(l+1)$ , es decir

$$R(\rho) \approx \rho^l \quad \text{o} \quad R(\rho) \approx \rho^{-(l+1)}. \quad (11.13)$$

La función de onda debe ser finita, de lo contrario no puede ser normalizada, por lo que si  $r \ll 1$  la única solución aceptable es

$$R(\rho) \approx \rho^l, \quad \rho \ll 1. \quad (11.14)$$

Si  $\rho \gg 1$ , el potencial no debe importar, la ecuación asintótica en este caso es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{1}{4} R(\rho) &= \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{1}{4} R(\rho) \\ &\approx \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{4} R(\rho) \approx 0, \end{aligned}$$

que tiene las soluciones,

$$R(\rho) \approx e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad R(\rho) \approx e^{\frac{\rho}{2}}.$$

Debido a que la función de onda debe ser normalizada, la única solución con sentido es

$$R(\rho) \approx e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \rho \gg 1. \quad (11.15)$$

Entonces propondremos como solución

$$R(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho). \quad (11.16)$$

Note que  $u(\rho)$  debe ser una función tal que  $R(\rho \ll 1) \approx \rho^l$ , esto implica que  $u(0) = a_0 \neq 0$ . Además, si  $\rho \rightarrow \infty$  debe ocurrir que  $e^{-\frac{\rho}{2}}u(\rho) \rightarrow 0$ , por lo tanto en infinito la función  $u(\rho)$  debe ser dominada por  $e^{-\frac{\rho}{2}}$ .

Para el caso particular del potencial de Coulomb

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r} = -\frac{e^2 Z \alpha}{\rho}, \quad (11.17)$$

definiendo

$$\lambda = \frac{2me^2 Z}{\hbar^2 \alpha} = \frac{e^2 Z}{\hbar} \sqrt{\frac{-m}{2E}} \quad (11.18)$$

la ecuación (11.10) toma la forma

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right) R(\rho) = 0. \quad (11.19)$$

Antes de ocupar la propuesta de solución (11.16) notemos que

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) = l\rho^{l-1} e^{-\frac{\rho}{2}} - \frac{1}{2} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) &= \frac{d}{d\rho} \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{d}{d\rho} \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( -\frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 - \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Entonces, considerando que  $(AB)' = A'B + AB'$  y  $(AB)'' = A''B + 2A'B' + AB''$  se llega a

$$\begin{aligned} \frac{dR(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} \left( \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) u(\rho) \right) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \frac{d}{d\rho} \left( \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) u(\rho) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} &= \frac{d^2 (\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}})}{d\rho^2} u(\rho) + 2 \frac{d (\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}})}{d\rho} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \\
&= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) + 2 \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\
&\quad + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \\
&= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) \right).
\end{aligned}$$

Introduciendo estos resultados en (11.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) \right) \\
&+ \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{2}{\rho} \left( \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) \right) \\
&+ \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right) u(\rho) = 0,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left( \frac{l+1}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\
&+ \left( \frac{l^2 + l}{\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda - (l+1)}{\rho} \right) u(\rho) = 0,
\end{aligned}$$

es decir la ecuación que debe satisfacer  $u(\rho)$  es

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left( \frac{2(l+1)}{\rho} - 1 \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{\lambda - (l+1)}{\rho} \right) u(\rho) = 0. \quad (11.20)$$

Para resolver (11.20) propondremos la serie

$$u(\rho) = \sum_{n \geq 0} a_n \rho^n, \quad u(0) = a_0 \neq 0,$$

que debe cumplir  $u(0) = a_0 \neq 0$  y si  $\rho \rightarrow \infty$ , entonces  $u(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} \rightarrow 0$ .



Para la propuesta de solución se tiene

$$\begin{aligned}\frac{u(\rho)}{\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n \rho^{n-1}, & \frac{du(\rho)}{d\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n \rho^{n-1}, \\ \frac{d^2 u(\rho)}{d^2 \rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \rho^{n-2},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2(l+1)}{\rho} \frac{du(\rho)}{d\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1+2l+2) \rho^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n n(n+2l+1) \rho^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) \rho^{n-1}, \\ -\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left( \frac{\lambda - (l+1)}{\rho} \right) u(\rho) &= \sum_{n \geq 0} a_n (\lambda - (n+l+1)) \rho^{n-1}.\end{aligned}$$

Considerando estos resultados en (11.20) se encuentra

$$\sum_{n \geq 0} \left( a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) + a_n(\lambda - (n+l+1)) \right) \rho^{n-1} = 0,$$

así

$$a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) + a_n(\lambda - (n+l+1)) = 0,$$

que implica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+l+1-\lambda}{(n+1)(n+2l+2)}. \quad (11.21)$$

Si  $\rho \rightarrow \infty$  los términos que contribuyen son los más grandes, es decir los que cumplen  $n \gg 1$ , en este caso se encuentra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{n}{nn} = \frac{1}{n}.$$

Note que cuando  $n$  es muy grande la serie exponencial

$$e^\rho = \sum_{n \geq 0} b_n \rho^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{n!},$$

tiene un comportamiento similar

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}.$$

Por lo que si  $\rho \rightarrow \infty$ , entonces  $u(\rho) \rightarrow e^\rho$ . Este comportamiento no es permitido pues si  $\rho \rightarrow \infty$ , entonces  $u(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}} \rightarrow \infty$ . Para que  $u(\rho)$  no tenga ese comportamiento, no dejaremos que su serie pueda tomar valores grandes de  $n$ . Esto quiere decir que  $u(\rho)$  no puede ser una serie, sino un polinomio. Para que esto suceda después de cierto número todos los coeficientes de la serie deben ser nulos. De la relación (11.21) es claro que esto se logra si después de cierto número  $a_{n+1} = 0$ , que se cumple solo si

$$n + l + 1 - \lambda = 0. \quad (11.22)$$

Considerando la definición de  $\lambda$  (11.18) se encuentra

$$E_{nl} = - \left( \frac{Zme^2}{2\hbar^2} \right) \frac{Ze^2}{(n+l+1)^2}. \quad (11.23)$$

Además, introduciendo (11.22) en (11.20) se llega a

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \left( \frac{2(l+1)}{\rho} - 1 \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \frac{n}{\rho} u(\rho) = 0. \quad (11.24)$$

Definamos  $\rho = x$ ,  $\beta = 2l + 1$ ,  $u(x) = L_n^\beta(x)$ , entonces la ecuación (11.24) toma la forma

$$\frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + \left( \frac{\beta+1}{x} - 1 \right) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + \frac{n}{x} L_n^\beta(x) = 0, \quad (11.25)$$

esta es la llamada ecuación de Laguerre, que también se puede escribir como

$$x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta + 1 - x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + n L_n^\beta(x) = 0. \quad (11.26)$$

Supongamos que tenemos una solución,  $L_n^\beta(x)$ , de (11.25) y definamos la función

$$f_n^\beta(x) = \frac{1}{n+1} \left( x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n + \beta + 1 - x) L_n^\beta(x) \right). \quad (11.27)$$

Considerando (11.26) se tiene

$$\frac{df_n^\beta(x)}{dx} = \frac{1}{n+1} \left[ x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) + (n + \beta + 1 - x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \left[ x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta + 1 - x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+1) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \left[ (n+1) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (n+1) L_n^\beta(x) \right] = \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x), \\
\frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} &= \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} - \frac{dL_n^\beta(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
&x \frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta + 1 - x) \frac{df_n^\beta(x)}{dx} \\
&= x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (\beta + 1 - x) \left( \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) \right) \\
&= x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta + 1 - x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (\beta + 1 - x) L_n^\beta(x) \\
&= -n L_n^\beta(x) - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (\beta + 1 - x) L_n^\beta(x) \\
&= - \left( x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (\beta + n + 1 - x) L_n^\beta(x) \right) \\
&= -(n+1) f_n^\beta(x),
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta + 1 - x) \frac{df_n^\beta(x)}{dx} + (n+1) f_n^\beta(x) = 0.$$

Esto nos indica que si  $L_n^\beta(x)$  es solución de la ecuación de Laguerre, entonces  $f_n^\beta(x)$  también es solución de la ecuación de Laguerre donde se ha cambiado  $n$  por  $n+1$ . Así podemos llamar  $L_{n+1}^\beta(x)$  a  $f_n^\beta(x)$ , es decir

$$L_{n+1}^\beta(x) = \frac{1}{n+1} \left( x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n + \beta + 1 - x) L_n^\beta(x) \right). \quad (11.28)$$

Esta relación es muy útil, pues nos dice que basta resolver un caso para obtener todos los demás.

Claramente el caso más sencillo de la ecuación de Laguerre es cuando  $n = 0$ , donde (11.25) toma la forma

$$\frac{d^2 L_0^\beta(x)}{dx^2} + \left( \frac{\beta + 1}{x} - 1 \right) \frac{dL_0^\beta(x)}{dx} = 0. \quad (11.29)$$

Definiendo  $U(x) = \frac{dL_0^\beta(x)}{dx}$  se tiene la ecuación

$$\frac{dU(x)}{dx} + \left( \frac{\beta + 1}{x} - 1 \right) V(x) = 0, \quad (11.30)$$

cuya solución es

$$U(x) = A \frac{e^x}{x^{\beta+1}}, \quad A = \text{constante}. \quad (11.31)$$

Si  $A \neq 0$ , esta solución no es un polinomio, por lo que no nos ayuda a resolver el problema del átomo de Hidrógeno. Así el único caso que podemos tomar es  $U(x) = 0$ , que implica  $L_0^\beta(x) = \text{constante}$ . Tomaremos

$$L_0^\beta(x) = 1. \quad (11.32)$$

En general los polinomios de Laguerre tienen la forma

$$L_n^\beta(x) = \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}). \quad (11.33)$$

Probaremos esta afirmación por inducción, es claro que se cumple la igualdad para el caso  $n = 0$ , para el paso inductivo ocuparemos la igualdad

$$\frac{d^n}{dx^n} (AB) = \sum_{k=0}^n C_k^n \left( \frac{d^{n-k} A}{dx^{n-k}} \right) \left( \frac{d^k B}{dx^k} \right), \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (11.34)$$

Supondremos (11.33) y mostraremos que se cumple

$$\frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{(n+1)+\beta}) = L_{n+1}^\beta(x). \quad (11.35)$$

Tomando en cuenta (11.34) y (11.28) se encuentra

$$\begin{aligned} & \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{n+1+\beta}) = \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x e^{-x} x^{n+\beta}) \\ &= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)n!} \left( x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{n+\beta}) C_0^{n+1} + \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) C_1^{n+1} \right) \\ &= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \frac{d}{dx} \left( e^{-x} x^\beta \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) \right) + \\ & \frac{1}{n+1} \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) \frac{(n+1)!}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \frac{d}{dx} (e^{-x} x^\beta L_n^\beta(x)) + L_n^\beta(x) \\
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \left( (-1) e^{-x} x^\beta L_n^\beta(x) + \beta x^{\beta-1} e^{-x} L_n^\beta(x) + x^\beta e^{-x} \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} \right) \\
&\quad + L_n^\beta(x) \\
&= \frac{1}{n+1} \left( x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+1+\beta-x) L_n^\beta(x) \right) \\
&= L_{n+1}^\beta(x),
\end{aligned}$$

considerando la igualdad (11.28) se llega a (11.35). Por lo tanto, (11.33) se cumple para cualquier  $n$ .

Ahora veamos la forma explícita de los polinomio de Laguerre, para ello recordemos que, si  $n < m$ ,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \quad (11.36)$$

Ocupando esta igualdad y (11.34) se llega a

$$\begin{aligned}
L_n^\beta(x) &= \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) = \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \sum_{k=0}^n C_k^n \left( \frac{d^{n-k} x^{n+\beta}}{dx^{n-k}} \right) \left( \frac{d^k e^{-x}}{dx^k} \right) \\
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{(n+\beta)!}{((n+\beta-(n-k))!)} (-1)^k x^{n+\beta-(n-k)} e^{-x} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(n+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\beta)!} (-x)^k,
\end{aligned} \quad (11.37)$$

es decir,

$$L_n^\beta(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\beta)!} (-x)^k. \quad (11.38)$$

## 11.2. Función de onda

Reuniendo los resultados de la sección anterior, encontramos que la función de onda del átomo de hidrógeno es

$$\begin{aligned}
\psi_{nlm}(\rho, \theta, \varphi) &= A \rho^l L_n^{2l+1}(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \\
E_{nl} &= -\frac{Z e^2}{a_{RB}(n+l+1)^2}, \quad a_{RB} = \frac{2\hbar^2}{Z m e^2},
\end{aligned} \quad (11.39)$$

con  $A$  una constante de normalización. Considerando que  $N = n + l + 1$ , es más conveniente escribir la función de onda de la forma

$$\begin{aligned}\psi_{Nlm}(\rho, \theta, \varphi) &= A\rho^l L_{N-(l+1)}^{2l+1}(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ E_N &= -\frac{Ze^2}{a_{RB}N^2}, \quad N = n + l + 1.\end{aligned}$$

## Capítulo 12

### Ecuación de Helmholtz

Ahora estudiaremos las soluciones de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas.

La ecuación de Helmholtz es

$$(\nabla^2 + k^2) \phi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (12.1)$$

ocupando coordenadas esféricas se tiene

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right) - \frac{L^2 \phi(r, \theta, \varphi)}{r^2} + k^2 \phi(r, \theta, \varphi) \right) = 0, \\ L^2 = & - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

con  $L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Por lo que, para resolver (12.1) propondremos la función  $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Como la función  $R(r)$  solo depende de  $r$  mientras que  $L^2$  y  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  solo dependen de los ángulos, la ecuación de Helmholtz toma la forma

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2) \phi(r, \theta, \varphi) \\ = & Y_{lm}(\theta, \phi) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} + k^2 R(r) \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir la ecuación a resolver es

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} + k^2 R(r) \right) = 0. \quad (12.2)$$

Tomaremos la propuesta  $R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}$ , de donde

$$\begin{aligned}\frac{dR(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{2r\sqrt{r}} u(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{2r} u(r) \right), \\ r^2 \frac{dR(r)}{dr} &= r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( r^2 \frac{du(r)}{dr} - \frac{r}{2} u(r) \right), \\ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left( r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{4} u(r) \right).\end{aligned}$$

Considerando estos resultados en (12.2) se llega a

$$\frac{1}{r^2 \sqrt{r}} \left( r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{4} u(r) \right) - \frac{1}{r^2 \sqrt{r}} l(l+1) u(r) + k^2 u(r) = 0,$$

que se puede escribir como

$$r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} + \left( k^2 r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) u(r) = 0$$

con los cambios de variable  $z = kr$  y  $\nu = l + \frac{1}{2}$  se tiene la ecuación de Bessel (5.2). Por lo que las soluciones son combinaciones lineales de las funciones

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \quad J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr) \quad (12.3)$$

En lugar de  $J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr)$  podemos tomar las funciones de Neuman  $N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ . Además, considerando la definición de  $R(r)$  y de las funciones esféricas de Bessel se tiene

$$R_l(r) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr) \quad (12.4)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Helmholtz son de la forma

$$\phi_{lm}(r, \theta, \varphi) = (a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (12.5)$$

la solución general es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} (a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (12.6)$$



## 12.1. Aplicaciones

Una partícula cuántica está encerrada en una esfera de radio  $R$ , encuentre la función de onda del sistema.

En este caso la función de onda es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = E\phi, \quad (12.7)$$

de donde

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (12.8)$$

que es la ecuación de Helmholtz. Como la probabilidad de encontrar la partícula dentro de la esfera debe ser finita y las funciones de Neumann divergen en el origen, las soluciones aceptables son de la forma  $j_l(kr)$ . Además, la función de onda se debe anular en la frontera, por lo que

$$j_l(kR) = 0, \quad (12.9)$$

de donde  $kR = \lambda_{ln}$  con  $\lambda_{ln}$  una raíz de la función esférica de Bessel de orden  $l$ . Considerando la definición de  $k$ , las energías son de la forma

$$E_{ln} = \frac{\hbar^2\lambda_{ln}^2}{2mR^2} \quad (12.10)$$

## 12.2. Cavidades Resonantes

La atmósfera como una cavidad resonante.

## 12.3. Desarrollo en ondas parciales

Claramente la función  $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  es solución a la ecuación de Helmholtz (12.1). Por lo que esta función se debe poder expresar en términos de las funciones esféricas de Bessel y los armónicos esféricos. Para probar esta afirmación el resultado fundamental es la integral

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} (i)^l J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha). \quad (12.11)$$

Para mostrar este resultado ocuparemos dos identidades que se deducen de (5.35)-(5.36)

$$\frac{dJ_\nu(dz)}{z} = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)), \quad (12.12)$$

$$\frac{J_\nu(z)}{z} = \frac{1}{2\nu} (J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)). \quad (12.13)$$

Otro resultado de utilidad es

$$(2l+1) \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) = \left( (l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right), \quad (12.14)$$

que se deduce de (12.12)-(12.13), pues

$$\begin{aligned} & (2l+1) \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ &= (2l+1) \left( \frac{1}{2 \cdot 2(l+\frac{1}{2})} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - \frac{1}{2} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right) \\ &= \frac{(2l+1)}{2} \left[ \frac{1}{(2l+1)} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right] \\ &= \frac{(2l+1)}{2(2l+1)} \left[ (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - (2l+1)(J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right] \\ &= \frac{1}{2} (2(l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - 2lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha)) = \left( (l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Mostremos la igualdad (12.11) para  $l = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_0(z) &= \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\ &= \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ &= \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\pi\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \\ &= \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha), \end{aligned} \quad (12.15)$$

es decir

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_0(z) = \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha). \quad (12.16)$$

Para el caso  $l = 1$  tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_1(z) &= \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} z = (-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} \right) \\
&= (-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) \right) \\
&= (-i) \left[ (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(-)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) + \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right] \\
&= (-i) \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} + \frac{\partial J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right], \tag{12.17}
\end{aligned}$$

considerando (12.12)-(12.13) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_1(z) &= (-i) \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \left( J_{-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{\frac{3}{2}}(\alpha) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( J_{-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{\frac{3}{2}}(\alpha) \right) \right] \\
&= (i) \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\alpha) \tag{12.18}
\end{aligned}$$

Para probar que (12.11) es válida para cualquier  $l$  ocuparemos el principio de inducción fuerte. Esto quiere decir supondremos que esta igualdad es válida para  $l$  y también para todos los valores menores que  $l$  y probaremos que se cumple

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l+1}(z) = \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha). \tag{12.19}$$

Antes de iniciar la prueba, notemos que la identidad (9.215) se puede escribir como

$$P_{l+1}(z) = \frac{1}{l+1} ((2l+1)zP_l(z) - lP_{l-1}(z)). \tag{12.20}$$

Entonces, recurriendo a la identidad (12.14) y tomando en cuenta que  $-(i)^{l-1} = (i)^{l+1}$ , se llega a

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l+1}(z) = \frac{1}{l+1} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} [(2l+1)P_l(z) - lP_{l-1}(z)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l+1} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} [(2l+1)zP_l(z) - lP_{l-1}(z)] \\
&= \frac{1}{l+1} \left[ (2l+1) \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} zP_l(z) - l \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l-1}(z) \right] \\
&= \frac{1}{l+1} \left[ (2l+1)(-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) \right) - l \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l-1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{l+1} \left[ (2l+1)(-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^l J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha) \right) + l \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\
&= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left[ (2l+1)(-) \left( (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(-)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha) + \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + l \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\
&= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left[ (2l+1) \left( \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + l \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\
&= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ (2l+1) \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) + l J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right], \\
&= \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha), \tag{12.21}
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, la igualdad (12.11) es correcta para cualquier  $l$  natural. Considerando la definición de las funciones esféricas de Bessel, la ecuación (12.11) toma la forma

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) = 2(i)^l j_l(\alpha). \tag{12.22}$$

Ahora, como los polinomios de Legendre son un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo  $(-1, 1)$ , cualquier función se puede expresar como una serie de Polinomios de Legendre. En particular la función exponencial,  $e^{i\alpha z}$ , es decir

$$e^{i\alpha z} = \sum_{m \geq 0} a_m P_m(z), \tag{12.23}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{i\alpha z} P_l(z) &= \int_{-1}^1 dz P_l(z) \left( \sum_{m \geq 0} a_m P_m(z) \right) = \sum_{m \geq 0} a_m \int_{-1}^1 dz P_l(z) P_m(z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \frac{2\delta_{lm}}{2l+1} = \frac{2a_l}{2l+1}.\end{aligned}\quad (12.24)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta (12.22), se encuentra

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\alpha z} P_l(z) = (i)^l (2l+1) j_l(\alpha), \quad (12.25)$$

que implica

$$e^{i\alpha z} = \sum_{l \geq 0} (i)^l (2l+1) j_l(\alpha) P_l(z). \quad (12.26)$$

En particular, si tenemos los vectores

$$\vec{k} = k(\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'), \quad \vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

donde  $\gamma$  es el ángulo que hay entre ellos, como  $\cos \gamma \leq 1$ , se encuentra

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{l \geq 0} (2l+1) (i)^l j_l(kr) P_l(\cos \gamma) \quad (12.27)$$

ocupando el teorema de adición de los armónicos esféricos se llega a

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l (i)^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (12.28)$$

A esta expresión se le llama desarrollo en ondas parciales y es de utilidad en diferentes aplicaciones.

## 12.4. Cavidades Resonantes

La atmósfera como una cavidad resonante.

# Capítulo 13

## Otras aplicaciones de la Ecuación de Schrodinger

No todas las ecuaciones en derivadas parciales se pueden escribir en términos de operadores Hermíticos. Sin embargo, mediante ciertas transformaciones algunas ecuaciones importantes como la ecuación de Fokker-Planck y la ecuación de Black-Scholes se pueden escribir reducir a una ecuación tipo Schrodinger.

Cabe señalar que la ecuación de Fokker-Planck es importante en procesos estocásticos y la ecuación de Black-Scholes es importante para el estudio de las finanzas.

### 13.1. Ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck es

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t, \nu)}{\partial t} = & -\nu \frac{\partial P(x, t, \nu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \left( \frac{\gamma \nu}{m} - \frac{F(x)}{m} \right) P(x, t, \nu) \right) \\ & + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 P(x, t, \nu)}{\partial \nu^2} \end{aligned} \quad (13.1)$$

donde  $\gamma$  es una constante de fricción,  $m$  es la masa y  $F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$  es la fuerza.

Para el caso de fricción fuerte, se puede mostrar que esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} P(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad t = \gamma \tau \quad (13.2)$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} P(x, \tau) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial^2 P(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (13.3)$$

Esta ecuación no está en términos de operadores hermíticos. En efecto, sabemos que el operador

$$\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (13.4)$$

es hermítico, de donde

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = \hat{h} P(x, \tau), \quad \hat{h} = -\frac{g}{2\gamma} \hat{p}^2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x} i \hat{p} + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2},$$

claramente el operador  $\hat{h}$  no es hermítico. Sin embargo, mediante una transformación se puede pasar a un operador hermítico. Por ejemplo, consideremos

$$P(x, \tau) = e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \psi(x, \tau), \quad (13.5)$$

de donde

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} = e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right). \quad (13.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V(x)}{\partial x} P(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} \\ &= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \left( -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right) \right] \\ &= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} P(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} \right) \\ &= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( -\frac{\gamma}{2g} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^2 \psi(x, \tau) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \psi(x, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial x} + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \\
&= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( -\frac{\gamma}{2g} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^2 \psi(x, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \psi(x, \tau) + \frac{g}{2\gamma} \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \\
&= e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{\gamma}{g} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right) \psi(x, \tau) - \frac{g}{2\gamma} \hat{p}^2 \psi(x, \tau) \right) \\
&= -e^{\frac{-\gamma V(x)}{g}} \hat{H} \psi(x, \tau), \tag{13.7}
\end{aligned}$$

con

$$\hat{H} = \frac{g}{2\gamma} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right). \tag{13.8}$$

Claramente el operador  $\hat{H}$  es hermítico. Sustituyendo la ecuación (13.7) en (13.2) se tiene

$$-\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = \hat{H} \psi(x, \tau). \tag{13.9}$$

Para resolver esta ecuación se puede proponer la solución  $\psi(x, \tau) = e^{-\lambda \tau} \phi(x)$ , por lo que  $\psi(x)$  debe satisfacer

$$H\phi(x) = \lambda \phi(x). \tag{13.10}$$

para el caso  $\lambda = 0$  se puede mostrar que  $\phi_0(x) = e^{-\frac{V(x)g}{\gamma}}$  es solución de (13.10).

### 13.1.1. caso libre y homogéneo

Para el caso libre  $V(x) = 0$  y homogéneo,  $\frac{\partial P(x, \nu, \tau)}{\partial x} = 0$ , la ecuación de Fokker-Planck (13.1) toma la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t, \nu)}{\partial t} &= \frac{\gamma}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} (\nu P(t, \nu)) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 P(t, \nu)}{\partial \nu^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} \right). \tag{13.11}
\end{aligned}$$

Esta ecuación no está en términos de operadores hermíticos, para expresarla con operadores hermíticos usaremos la transformación

$$P(\nu, t) = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \psi(\nu, t). \tag{13.12}$$



De donde

$$\frac{\partial P(\nu, t)}{\partial \nu} = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left( -\frac{m\gamma\nu}{g} \psi(\nu, t) + \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right). \quad (13.13)$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} = \\ & = \frac{\gamma\nu}{m} e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left( -\frac{m\gamma\nu}{g} \psi(\nu, t) + \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left( \frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left( \frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right) \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[ -\frac{m\gamma\nu}{g} \left( \frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right] \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[ -\frac{\gamma^2\nu^2}{2g} \psi(\nu, t) - \frac{\gamma\nu}{2m} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} + \frac{\gamma}{2m} \psi(\nu, t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma\nu}{2m} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 \psi(\nu, t)}{\partial \nu^2} \right] \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[ \left( \frac{\gamma}{2m} - \frac{\gamma^2\nu^2}{2g} \right) \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 \psi(\nu, t)}{\partial \nu^2} \right] \\ & = -e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \hat{H} \psi(\nu, t) \end{aligned} \quad (13.14)$$

con

$$\hat{H} = \frac{g}{2m^2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma^2\nu^2}{g} - \frac{\gamma}{m} \right), \quad \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (13.15)$$

claramente  $\hat{H}$  es un operador hermítico. Considerando este resultado en (13.11) se llega a

$$-\frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\nu, t). \quad (13.16)$$

Si se propone como solución a  $\psi(\nu, \tau) = e^{-\lambda\tau} \phi(\nu)$  se encuentra

$$\hat{H}\phi(\nu) = \lambda\phi(\nu), \quad (13.17)$$

es decir se tiene la ecuación de valores propios

$$\left( \frac{g}{2m^2} \hat{p}^2 + \frac{\gamma^2}{2g} \nu^2 - \frac{\gamma}{m} \right) \phi(\nu) = \lambda\phi(\nu). \quad (13.18)$$

Note que renombrando

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{g}{2m^2}, \quad m\omega^2 = \frac{\gamma^2}{g}, \quad E = \lambda + \frac{\gamma}{m} \quad (13.19)$$

la ecuación (13.18) toma la forma

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{m\omega^2}{2} \nu^2 \right) \phi(\nu) = E\phi(\nu). \quad (13.20)$$

que es la ecuación del oscilador armónico. Por lo tanto, las soluciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet,  $\phi(\pm\infty) = 0$ , implican

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) = \lambda + \frac{\gamma}{m}, \quad (13.21)$$

es decir

$$\lambda_n = \frac{\gamma}{m} \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (13.22)$$

Además, definiendo

$$\zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \nu = \sqrt{\frac{m\gamma}{g}} \nu \quad (13.23)$$

se tiene las soluciones

$$\phi_n(\zeta) = \frac{(i)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\gamma}{\pi g} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta). \quad (13.24)$$

Por lo tanto,

$$P_n(\nu, t) = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} e^{-\lambda_n t} \phi_n(\nu) = \frac{(i)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\gamma}{\pi g} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta^2} H_n(\zeta). \quad (13.25)$$

## 13.2. Black-Scholes

On the other hand, let us consider the fundamental equation in quantum finance, the so-called Black-Scholes equation (??)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C}{\partial S} + rC, \quad (13.26)$$

where  $C$  is the option price,  $\sigma$  is a constant called the volatility and  $r$  is the interest rate [?]. With the change of variable  $S = e^x$  we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= H_{BS} C, \\ H_{BS} &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + r \end{aligned} \quad (13.27)$$

this non-Hermitian Hamiltonian is called Black-Scholes Hamiltonian. Now, considering the one dimensional case of (??) and identifying

$$\beta^2 = \frac{\sigma^2}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) x, \quad V_2(x) = r$$

we obtain  $H_{II} = H_{BS}$ .

One generalized Black-Scholes equation, (see [?]) is given by

$$H_{BSG} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - V(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} + V(x). \quad (13.28)$$

In this case, considering again the one dimensional case of equation (??) and with

$$\beta^2 = \frac{\sigma^2}{2}, \quad f(x) = \int_0^x du \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - V(u) \right), \quad V_2(x) = V(x)$$

we have  $H_{II} = H_{BSG}$ .

Moreover, the so-called barrier option case has Hamiltonian

$$H_{BSB} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + V(x). \quad (13.29)$$

Again, considering (??) in one dimension and with

$$\beta^2 = \frac{\sigma^2}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) x, \quad V_2(x) = V(x)$$

we have  $H_{II} = H_{BSB}$ .

# Referencias

- [1] R. Courant, F. John *Introducción al cálculo y al análisis matemático, Vol I*. Editorila Limusa (1990). Academic San Diego (1995).
- [2] B. Arfken H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic San Diego (1995).
- [3] F. Simmons, J. S. Robertson, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, Segunda edición, McGraw-Hill (1993).
- [4] L. Debnath, D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, London (2007).
- [5] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press Inc, New York (1972).
- [6] A.N. Kolmogorov, S.V. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir Moscú (1975).
- [7] E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press (1996).1953
- [8] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol I y II McGraw-Hill, (1953)
- [9] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Dover, New York (1990).
- [10] L. Infeld, T. E. Hull, *The Factorization Method*, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [11] N, Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, American Mathematical Society (1968).